

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики и технологий
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ

Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.01 – Педагогическое образование»
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:
Заведующий кафедрой

дата

подпись

оценка

Исполнитель:

Зюзева Ольга Сергеевна,
обучающаяся группы МАТ-1501

подпись

Научный руководитель:

Блинова Татьяна Леонидовна,
канд. пед. наук, доцент

подпись

Екатеринбург 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ.....	6
1.1. Понятие и структура познавательных универсальных учебных действий	6
1.2. Сущность процесса обучения доказательству теорем	14
1.3. Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в процессе обучения доказательству теорем	18
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1	38
ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ.....	40
2.1. Анализ познавательной сферы обучающихся 10-11 классов.....	40
2.2. Требования к организации процесса обучения доказательству теорем, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся.....	45
2.3. Система конспектов уроков	56
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2	70
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	71
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСОВ	73

ВВЕДЕНИЕ

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования от 17 мая 2012 года устанавливает требования к результатам усвоения обучающимися основной образовательной программы: личностным, метапредметным, предметным. В перечень метапредметных результатов обучения входят универсальные учебные действия: регулятивные, познавательные, коммуникативные. Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту универсальные учебные действия должны являться целью обучения и формироваться в процессе освоения обучающимися каждой предметной области с учетом её специфики, в том числе и математики. Математика, в силу своего предметного содержания, имеет все возможности для полноценного формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся. Одной из основных единиц школьного курса математики является теорема. В процессе обучения ее доказательству и применению не только формируются математические знания, умения и навыки, соответствующие предметным результатам обучения, но и развиваются мыслительные способности; формируются умения строить самостоятельный процесс поиска, исследования; построения логической цепочки рассуждений, осуществления доказательства, выдвижения и обоснования гипотез. Указанные умения и являются компонентами познавательных универсальных учебных действий.

Проблемой обучения доказательству теорем занимались такие исследователи как Я.И. Груденов, В.А. Далингер, Г. И. Саранцев, З. И. Слепкань, А.А Столяр. В их работах были сформулированы основные особенности обучения доказательству, показана роль и место доказательств в процессе обучения, значение роли учителя в этом

процессе, созданы рекомендации по организации обучения доказательствам.

Однако, в настоящее время процесс организации обучения математике, в частности обучения доказательству теорем обучающихся 10-11 классов, в условиях новых федеральных государственных образовательных стандартов требует теоретической корректировки и адаптации к деятельности современного учителя.

Все вышесказанное обуславливает актуальность данной темы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся 10-11 классов в процессе обучения доказательству теорем.

Цель: разработать требования к организации процесса обучения доказательству теорем обучающихся 10-11 классов, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий, и проиллюстрировать теоретические положения на примере системы конспектов уроков.

Задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую и методическую литературу, интернет-ресурсы с целью выделения сущности, структуры и пооперационного состава познавательных универсальных учебных действий обучающихся.
2. Определить сущность понятия обучения доказательству теорем и основные этапы организации данного процесса.
3. Установить соответствие между деятельностью обучающихся на каждом из этапов изучения теоремы и компонентами познавательных универсальных учебных действий.

4. Выделить особенности познавательной сферы обучающихся 10-11 классов.

5. Разработать требования к организации процесса обучения доказательству теорем обучающихся 10-11 классов, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий.

6. Сконструировать систему уроков по работе с теоремой, иллюстрирующих выполнение заявленных требований.

Структура работы: введение; основная часть, состоящая из двух глав; заключение; список использованной литературы и интернет ресурсов, содержащий 45 источников.

Основные результаты исследования представлены в публикации: Блинова Т.Л., Зюзева О.С. Формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся старшей школы в процессе обучения доказательству теорем// Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий [Электронный ресурс] : межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т ; науч. ред. Л. В. Сардак. – Екатеринбург: 2019. - С. 172-176.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ

1.1. Понятие и структура познавательных универсальных учебных действий

Информационное общество предъявляет к современным людям множество новых требований, одно из которых - умение ориентироваться в возрастающем потоке информации, управлять им и использовать его для решения практических задач. В связи с этим особую значимость приобретает готовность обучающихся к поиску и переработке информации, способность к переносу освоенных навыков на другие области. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) обеспечивает достижение требований общества путем формирования у обучающихся универсальных учебных действий (УУД), в частности познавательных универсальных учебных действий (ПУУД).

Существуют различные подходы к определению понятия познавательные универсальные учебные действия. Выделим определения ПУУД, сформулированные в работах авторов, работающих по данной теме.

Л.И. Боженкова под познавательными действиями понимает такие, которые обеспечивают познание – умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку [5].

В статье [7] познавательные универсальные учебные действия определены как система способов познания окружающего мира, построение самостоятельного процесса поиска, исследования и совокупность операций по переработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации.

Т.Н. Черняева и Н.А. Чуланова под познавательными универсальными учебными действиями понимают умственные действия, направленные на планирование, осуществление, анализ своей познавательной деятельности и управление ею на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенных обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов [44].

Согласно А.Г. Асмолову познавательные универсальные учебные действия – это умения результативно мыслить и работать с информацией в современном мире. Они обеспечивают способность к познанию окружающего мира: готовность осуществлять направленный поиск, обработку и использование информации [1].

По И.Д. Лушникову и Е.Ю. Ногтевой познавательные действия – действия, обеспечивающие научно – ориентированное познание мира и развитие познавательных функций личности [22].

Анализ данных определений показывает, что основными признаками ПУУД является «процесс познания», «поиск информации», «использование информации», «обработка информации». Основываясь на данных признаках, можно определить познавательные универсальные учебные действия как действия, обеспечивающие познание, включающее в себя поиск необходимой информации, работу с полученной информацией, обработку информации и ее использование, как в рамках образовательного процесса, так и в жизненных ситуациях.

Авторы, занимающиеся проблемой формирования познавательных универсальных учебных действий, включают в их структуру различные компоненты. Анализ литературы [1, 9, 22, 23] показал, что структуры действий, выделенные этими авторами, имеют сходную характеристику и основываются на структуре, выделенной А.Г. Асмоловым, согласно которой блок познавательных универсальных учебных действий содержит

общеучебные действия, включая знаково-символические; логические действия, а также действия постановки и решения проблем [1].

Функцией общеучебных действий является управление познавательными процессами. К ним относятся [1]:

- исследовательские (самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, гипотез и их проверка);
- информационные (поиск и выделение необходимой информации, в том числе с помощью компьютерных средств, обработка, хранение, защита и использование информации);
- знаково-символические действия (замещение, создание и преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область, использование модели для решения задач);
- умение структурировать знания;
- умение осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной форме;
- выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
- познавательная и личностная рефлексия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности;
- смысловое чтение на основе осознания цели чтения и выбора вида чтения в зависимости от цели, извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров, определение основной и второстепенной информации; умение адекватно, подробно, сжато, выборочно передавать содержание текста.

Функция логических действий состоит в обеспечении инструментальной основы мышления и решения проблем, в том числе исследовательских. К ним относятся [1]:

- анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных);
- синтез как составление целого из частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов;
- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов;
- подведение под понятия, выведение следствий;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений;
- выдвижение гипотез, их обоснование и доказательство.

Действия постановки и решения проблем выполняют функцию исследования проблемной области с выделением цели как образа необходимого будущего, стратегии и тактики ее достижения. Исследовательские действия включают: формулирование проблемы и самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера [1].

В ФГОС и примерной основной образовательной программе среднего общего образования ПУУД сформулированы на достаточно обобщенном языке. Для их целенаправленного формирования необходимо конкретизировать пооперационный состав этих действий. Не претендуя на полноту, представим конкретный состав рассматриваемых действий.

Общеучебные познавательные универсальные действия (ОПУД):

- поиск и выделение необходимой информации, в том числе с помощью компьютерных средств, обработка, хранение, защита и использование информации:
 - умение определять, какие знания необходимо приобрести для решения учебных, межпредметных задач;

– умение отбирать для решения задач необходимые источники информации (словари, энциклопедии, справочники, электронные и интернет – ресурсы, СМИ);

– умение сопоставлять и отбирать информацию, полученную из различных источников;

- структурирование знаний:

– умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм;

– умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений;

– умение получить информацию из представленного графика, диаграммы, схемы;

– умение достраивать недостающие элементы совокупности;

– умение устанавливать связи между объектами и их частями [6];

- выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий:

– умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях;

– умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым;

– умение решить задачу несколькими способами [6];

- рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности:

– умение выделить критерии для оценки результата или процесса;

– умение оценить по заданной системе критериев;

– умение нахождения ошибок в решении [6].

Знаково-символические действия:

– умение выделять существенные характеристики объекта (пространственно-графические или знаково-символические);

- умение преобразовать объект из чувственной формы в модель, в которой будут отражены его существенные признаки (создание модели);
- умение кодирования и декодирования информации;
- умение преобразовывать модель с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область;
- умение использовать модели для решения задач.

Логические познавательные универсальные действия (ЛПУД):

- анализ объектов:
 - умение разделять объект на части;
 - умение располагать части в определенной последовательности;
 - умение характеризовать части этого объекта [9];
- синтез:
 - умение выделять основание объединения;
 - умение объединять элементы по заданному основанию;
 - умение преобразовать целое по другому основанию [6];
- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов:
 - умение определять основание классификации объектов;
 - умение распределять элементы по заданному критерию;
 - умение выделять признаки, по которым сравниваются объекты;
 - умение выделять признаки сходства/различия;
 - умение выделять главное и второстепенное в изучаемом объекте;
 - умение выделить признаки объекта по определенному критерию [6];
- подведение под понятие, выведение следствий:
 - умение формулировать понятие, под которое подводится исследуемый объект;
 - умение выделять существенные признаки данного понятия (ближайшее родовое понятие, видовые отличия), зафиксированные в определении;

– умение устанавливать логические связи между выделенными признаками;

– умение устанавливать наличие у объекта выделенных существенных признаков и связей между ними;

– умение делать вывод о принадлежности объекта данному понятию (всеми ли существенными признаками и связями между ними обладает исследуемый объект);

– умение выделять существенные признаки объекта, принадлежащие данному понятию, т.е. такие, которые являются следствием принадлежности его к данному классу к данному понятию, а также дополнительных свойств объекта [5];

- установление причинно-следственных связей:

– умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям;

– умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям;

– умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату [6];

– умение находить главное в изучаемом явлении или объекте;

– умение устанавливать главную причину явления;

– умение кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие [9];

- построение логической цепочки рассуждений:

– умение разделять рассуждения на основные компоненты;

– умение устанавливать связи между выделенными компонентами;

– умение располагать компоненты в определенной последовательности;

- доказательство:

- умение составлять цепочки умозаключений (правильных), идущих от верных посылок (исходных для данного доказательства суждений) к доказываемым (заключительным) тезисам;
- умение устанавливать связи между аргументами, ведущими от условия к заключению (использовать методы доказательства);
 - выдвижение гипотез и их обоснование:
- умение формулировать вывод/предположение на основе нескольких положений;
- умение определить закон, которому подчиняется данное явление;
- умение разделять гипотезу/предположение на структурные составляющие;
- умение выбирать из нескольких предположений/выводов/гипотез наиболее корректные, в наибольшей степени отражающие заданные посылки;
- умение обосновывать гипотезу, используя известные теоретические факты или наблюдения и эксперименты [25].

Постановка и решение проблемы:

- формулирование проблемы:
 - умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи;
 - умение определять изменения в условиях;
 - умение определять недостаточную для решения задачи информацию [6];

Таким образом, выделенный пооперационный состав ПУУД дает возможность устанавливать соответствие между ними и деятельностью обучающихся, которая направлена на их формирование. Это соответствие позволит сделать вывод о том, целесообразна ли данная деятельность для формирования данного вида ПУУД.

1.2. Сущность процесса обучения доказательству теорем

Для достижения заявленной цели необходимо определить сущность понятия обучения доказательству теорем и основные этапы организации данного процесса.

Реализация современной роли математики предполагает улучшение математической подготовки учащихся, важное место в которой отводится умению открывать закономерности, обосновывать их и применять на практике. Поэтому проблема обучения учащихся доказательству теорем является одной из центральных в методике преподавания математики.

Существуют различные подходы к определению понятия «обучение доказательству».

Авторы одного подхода делают акцент на обучение школьников поиску доказательства и самостоятельному его осуществлению, специально противопоставляя его обучению работать с готовыми доказательствами. В частности, в работах А. А. Столяра под обучением доказательству понимается «обучение мыслительным процессам поиска, открытия и построения доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств» [37, с.145].

Авторы другого подхода акцент ставят на обучении учащихся умению разбираться в готовых доказательствах. В частности, в работах З.И. Слепкань под обучением доказательству понимается «обучение учащихся готовым доказательствам, предлагаемым учителем или учебником, и обучение самостоятельному поиску доказательств» [35, с.85]. В этих работах отмечается также, что «при надлежащей постановке обучения готовым доказательствам, можно формировать у школьников необходимые компоненты самостоятельного поиска и построения доказательств. Готовые доказательства должны выступать как модели, на которых школьники обучаются приемам умственной деятельности, лежащим в основе умения доказывать, применять

различные методы доказательств, самостоятельно искать доказательства по аналогии с изученными» [35, с.86].

В работах [32, 34] отмечается, что существующие точки зрения на сущность понятия «обучение доказательству» не противоречат друг другу, они лишь отражают две стороны проблемы обучения доказательству: логическую и эвристическую. Между тем реальный процесс доказательства опирается на единство логического и эвристического, в нем логика и эвристика (логические и эвристические приемы мышления, составляющие доказательство) взаимосвязаны и взаимообусловлены».

Подводя итог изложенному можно сделать вывод, что обучение доказательству должно включать обучение как умению разбираться в готовых доказательствах, так и умению самостоятельно осуществлять их поиск и конструирование. Указанные выводы реализовал в своей концепции обучения доказательству Г.И. Саранцев. Основными составляющими данной концепции являются: 1) под обучением доказательству понимается обучение учащихся анализу готовых доказательств, их воспроизведению, самостоятельному открытию факта, поиску и конструированию доказательства, а также опровержению предложенных доказательств; 2) единство логики и эвристики в обучении доказательству; 3) деятельностный подход [34]. Таким образом, особенность данной концепции не только в расширенном толковании обучения доказательству, но и в том, что она не противопоставляет логику и эвристику, а объединяет обе составляющие в единое целое.

Сущность обучения доказательству теорем сводится к обучению поиска ответов на три основных вопроса: «зачем надо доказывать?», «что надо доказывать?», «как надо доказывать?». Ответ на первый вопрос обусловлен мотивационным компонентом деятельности, который обеспечивается действиями целеполагания и мотивации. Второй вопрос актуализирует действия анализа теоремы - выделение условия, заключения теоремы, объектов, отношений между ними, построение графической модели ситуации,

отраженной в теореме. С данным вопросом соотносится и открытие доказываемых фактов, что обеспечивается владением и различными эвристиками. Ответ на третий вопрос предполагает поиск метода доказательства, его соотнесение с доказываемым утверждением, прогнозирование результатов использования метода, нахождение других методов доказательства, выбор наиболее оптимального из них и т. д.

Таким образом, процесс доказательства теоремы должен дать ответы на три сформулированных вопроса, поиск ответов на которые должен осуществляться поэтапно и последовательно. Кроме того, процесс работы над теоремой должен быть организован в рамках деятельностного подхода, который является основой ФГОС СОО. Применение деятельностного подхода предполагает выстраивание деятельности, адекватной знаниям и составляемой мотивационной сферой, различного рода действиями, способами деятельности, контролем и самоконтролем.

В контексте деятельностного подхода Г.И. Саранцев выделил следующие этапы изучения теоремы [33]:

- I. Мотивация изучения теоремы.
- II. Ознакомление с фактом, отраженным в теореме.
- III. Усвоение содержания теоремы, её структуры.
- IV. Запоминание формулировки теоремы.
- V. Ознакомление со способом доказательства.
- VI. Доказательство теоремы.
- VII. Применение теоремы.
- VIII. Установление связей теоремы с ранее изученными теоремами.

Эффективным средством реализации перечисленных этапов являются специальные упражнения, которые должны [34]:

- способствовать мотивации введения теоремы;
- выявлять закономерности, отраженные в теореме;
- способствовать усвоению содержания теоремы;

- помогать понимать значения каждого слова в формулировке теоремы, запоминанию её формулировки;
- обеспечивать восприятие идеи доказательства, раскрывать приемы доказательства;
- обучать применению теоремы; раскрывать взаимосвязь изучаемой теоремы с другими теоремами.

Таким образом, организация процесса изучения теоремы в соответствии с указанными этапами будет способствовать формированию у обучающихся действий, составляющих основу деятельности по доказательству утверждений, что приведет к овладению этим специфическим видом деятельности. Другими словами, такая организация процесса изучения теоремы дает возможность осуществлять эффективное обучение доказательству математических утверждений, т.е. обучение самостоятельному открытию факта, поиску и конструированию доказательства.

1.3. Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в процессе обучения доказательству теорем

Рассмотрим более подробно методику работы на указанных в предыдущем пункте этапах изучения теоремы, являющихся также этапами обучения доказательству, и соотнесем формируемые умения обучающихся на каждом из них с компонентами ПУУД, что позволит сделать вывод о целесообразности применения процесса обучения доказательству теорем для формирования ПУУД.

I этап – мотивация изучения теоремы.

Сущность данного этапа заключается в подчеркивании важности изучения теоремы, в побуждении обучающихся к целенаправленной и активной деятельности.

Перед изучением теоремы необходимо на уроке создать проблемную ситуацию, разбор которой мотивировал бы необходимость изучения этой теоремы. С этой целью используются различные практические ситуации и мотивационные упражнения. Для мотивировки необходимости изучения теорем можно использовать следующие приемы [20]:

Прием 1. Обобщение наблюдаемых в жизни фактов и явлений и перевод их на математический язык.

Например, мотивировать необходимость изучения свойства «Две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке» можно, предложив предварительно обучающимся решить дома

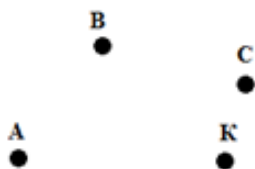


Рис.1

следующую задачу: «На плане местности четыре населенных пункта отмечены точками А, В, С, К (рис. 1). Выясните, пересекутся ли пути из пункта А в пункт С и из пункта К в пункт В (пути считаем прямолинейными). Если пересекутся, то в скольких

точках? Рассмотрите различные возможные случаи расположения населенных пунктов. Могут ли эти пути пересекаться в двух точках?».

В классе учитель выясняет полученные результаты решения задачи. Затем, отмечается, что пути движения в данных задачах были отрезками, и предлагается подумать над вопросом: измениться ли вывод, если вместо двух отрезков взять две прямые? Ответы могут быть разными. Если ответы разные, то сразу необходимо предложить выяснить, могут ли две прямые иметь две общие точки, и тем самым перейти к доказательству теоремы, мотив изучения которой стал очевиден. Если же ответ один, то есть две различные прямые пересекаются в одной точке, то учитель говорит, что в этой задаче это действительно так, но при решении других задач может быть по-другому: ведь невозможно рассмотреть все конкретные жизненные ситуации и прорешать все задачи. Следовательно, надо доказать, причем так, чтобы было истинно для любого случая.

Прием 2. Показ необходимости знания той или иной теоремы для решения практических задач.

Например, перед изучением теоремы о смежных и вертикальных углах обучающимся следует предложить такую задачу: «Два забора ОА и ОВ сходятся под углом α , отличным от

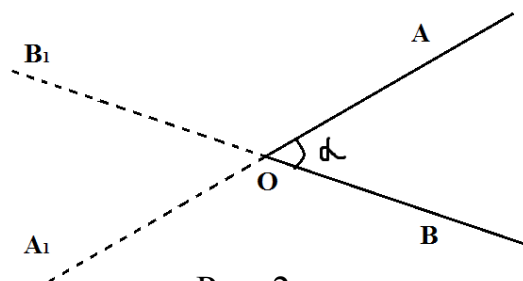


Рис. 2

прямого (рис.2). Как измерить этот угол α с помощью транспортира, не проникая внутрь этого угла [12]?»

Прием 3. Показ необходимости знания той или иной теоремы для решения задач и доказательства других теорем.

Например, перед доказательством теоремы о том, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны обучающимся предлагается задача, решение которой невозможно без знания данной теоремы: «В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) вершина угла B соединена с серединой K

стороны AC отрезком. Докажите, что треугольники ABK и CBK равны. Достаточно ли этих данных, чтобы установить равенство названных треугольников?»).

Прием 4. Показ, как решалась данная проблема в истории науки.

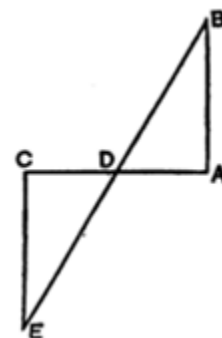


Рис. 3

Например, перед изучением теоремы о том, что если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны, можно привести историческую справку. «В древние времена, для определения расстояния от берега до морских кораблей, Фалес Милетский (философ древней Греции) использовал следующий способ: пусть A – точка берега, B – корабль на море (рис.3). Для определения расстояния AB восстанавливают на берегу перпендикуляр произвольной длины: $AC \perp AB$; в противоположном направлении восстанавливают $CE \perp AC$ так, чтобы точка D (середина AC), B и E находились на одной прямой. Тогда CE будет равна искомому расстоянию AB ». После этой справки учитель задает вопрос, а прав ли Фалес, утверждая, что $CE=AB$. Ответы обучающихся могут разделиться. Далее учитель вводит изучаемую теорему, пользуясь которой, обучающиеся ответят, что треугольники ABD и CED равны, а значит и соответственные стороны AB и CE равны.

Таким образом, работа на первом этапе связана с обзором потребностей практики или других исторических причин, приводящих к появлению рассматриваемого утверждения о свойствах некоторых понятий. Этап мотивации напрямую связан со вторым этапом изучения теоремы.

II этап - ознакомление с фактом, отраженным в теореме.

Целью данного этапа является выявление факта, отраженного в теореме, и знакомство с ним. Для «открытия» теоремы обучающимся следует предлагать задания, в ходе выполнения которых они получают нужный вывод.

Перечисленные на предыдущем этапе приемы для мотивации изучения теорем служат одновременно и раскрытию её содержания. Кроме перечисленных можно выделить следующие приемы раскрытия содержания теорем [20]:

1. Наблюдение наглядного материала, в том числе подвижных моделей или ряда чертежей. Например, перед изучением теоремы о высоте треугольника, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, необходимо поработать с подвижной моделью прямоугольного треугольника, вписанного в окружность, две стороны AC и CB и высота CD которого изготовлены из резинки. Перед обучающимися ставится задача, анализируя модель, найти зависимость между высотой CD и отрезками гипотенузы AD и DB [11].

2. Выполнение лабораторных и практических работ. Например, формулу площади сферы обучающиеся могут получить опытным путем. Для

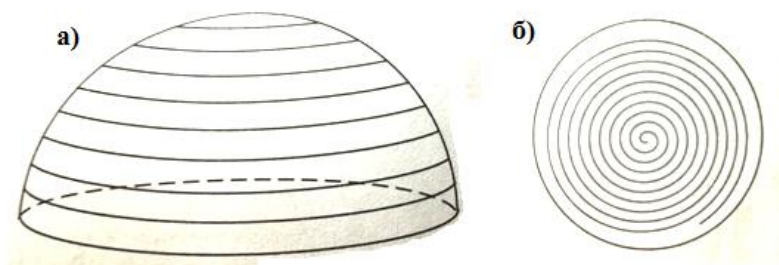


Рис. 4

этого они должны поступить следующим образом: на полусферу намотать веревку так, как это показано на рис.4,а (пусть длина затраченной

веревки будет l_1), затем уложить такую же веревку в круг, радиус которого равен радиусу сферы (рис.4б) (пусть длина затраченной веревки будет l_2). После этого перед обучающимися ставится задача сравнить длины затраченных веревок и, учитывая то, что веревка длины l_2 покрыла площадь πr^2 , выяснить чему равна площадь сферы [12].

3. Решение задач на вычисление и доказательство. Например, раскрыть содержание теоремы о том, что в прямоугольнике диагонали равны можно, решив с обучающимися устно несколько задач вида «Вычислите диагонали

прямоугольника АВСК, если его стороны равны: а) 3 и 4 см; б) 6 и 8 дм; в) 12 и 9 м. Какой вывод можно сделать из решения этих задач?».

4. Решение задач на отыскание некоторых зависимостей. Например, открыть зависимость между вписанным углом и дугой, на которую он опирается, обучающиеся могут, решив следующую задачу «Найти угол АВС, вписанный в окружность с центром О, если $O \in BC$ и $\angle AOC = 70^\circ$ [32]».

Главное на данном этапе – обязательно дать возможность обучающимся самостоятельно попытаться сформулировать теорему (пока в виде гипотезы). Учитель, в случае необходимости корректирует, исправляет, говорит о необходимости доказательства выдвинутой гипотезы, акцентируя внимание на том, что предположение было получено в результате измерений, которые могут быть неточными, или в результате рассмотрения частных случаев, поэтому говорить о достоверности выдвинутой гипотезы для общего случая без её доказательства невозможно [30].

Таким образом, обобщая все используемые на данных этапах изучения теоремы приемы и задания, можно выделить три большие группы специальных упражнений, являющихся средством реализации указанных этапов и отвечающих требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенные виды упражнений, деятельность обучающихся в процессе их выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 1

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на I и II этапах с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
• на измерение величин, на оперирование моделями фигур;	При решении задач, практических заданий или работы с моделями выявляют места и причины затруднений, определяют, каких знаний им недостаточно, чтобы успешно справиться с заданием.	Определять недостаточную для решения задачи информацию Вид ПУУД: постановка и решение проблемы.

Продолжение таблицы 1

<ul style="list-style-type: none"> • с практическим содержанием; • на применение ранее изученных понятий и теорем; 	Для поиска решения возникшей проблемы находят главное в изучаемом явлении/объекте, (именно то, что подвергается изменениям в зависимости от рассматриваемого случая); устанавливают причины, происходящих с явлением (объектом) изменений (почему они происходят) и то, что следует из этих изменений. После этого кратко оформляют высказывание, связывающее причину и следствие.	Находить главное в изучаемом явлении или объекте Устанавливать главную причину явления; Кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие; Вид ПУУД: установление причинно-следственных связей.
	На основе рассмотренных причин, зависимости их появления от изучаемого случая, выдвигают и формулируют предположения о том, какой математический факт необходимо доказать, осознают необходимость его обоснования, поясняют почему данному факту требуется обоснование.	Формулировать закон, которому подчиняется данное явление; формулировать вывод/предположение на основе нескольких положений. Вид ПУУД: выдвижение гипотез и их обоснование.
	После выдвижения гипотезы и осознания необходимости её доказательства формулируют цель дальнейшей деятельности, а именно познавательную цель, которая состоит в изучении теоремы и доказательстве факта, отраженного в ней.	Вид ПУУД: выделение и формулирование познавательной цели.

III этап – усвоение содержания теоремы, её структуры.

Целью данного этапа является изучение и усвоение содержания теоремы. Для достижения цели необходимо проводить работу по выделению из формулировки условия и заключения. Условие теоремы - некоторый предикат $A(x)$ заданный на множестве M , т.е. то, что дано в теореме; заключение теоремы — некоторый предикат $B(x)$ заданный на том же множестве M , т.е. то, что нужно доказать в теореме [11].

Для обучения выделять из формулировки теоремы условие и заключение и использовать полученную информацию применяются соответствующие задания [11, 16]:

1. Выясните, какой вид имеет формулировка теоремы, и выделите в ней условие и заключение, запишите их отдельными предложениями.

2. Сформулируйте теорему в условной форме (если теорема сформулирована в категорической форме).

3. Уточните условие и заключение, т.е. выясните, о каких фигурах идет речь, сколько их, какие свойства фигуры указаны.

4. Выполните краткую запись условия и заключения. Проверьте, все ли посылки условия вошли в краткую запись.

5. Определите вид теоремы. Выясните, какую логическую структуру имеет теорема.

Виды теорем:

1) $(\forall x \in M) (A(x) \Rightarrow B(x))$ — прямая теорема;

2) $(\forall x \in M) (B(x) \Rightarrow A(x))$ — обратная теорема;

3) $(\forall x \in M) (\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)})$ — противоположная теорема;

4) $(\forall x \in M) (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)})$ — теорема, обратная противоположной.

Логическая структура теоремы	
Конъюнктивная	Дизъюнктивная
$(\forall x \in M) (A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B(x))$	$(\forall x \in M) (A_1(x) \vee A_2(x) \Rightarrow B(x))$
$(\forall x \in M) (A(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$	$(\forall x \in M) (A(x) \Rightarrow B_1(x) \vee B_2(x))$
Знак \wedge - логическая связка «и», «а», «но», «причем», «также».	Знак \vee - логическая связка «или», «либо».

6. Сформулируйте обратное утверждение. Является ли оно теоремой?

Параллельно с выяснением условия и заключения теоремы для достижения цели данного этапа необходимо выполнять упражнения на вычленение на чертежах и моделях таких фигур, которые удовлетворяли бы условию теоремы; на выполнение чертежа, моделирующего условие и заключение теоремы [11].

Кроме указанных упражнений, для сознательного усвоения формулировки теоремы можно применять следующие приемы [11]:

1. Проводить работу по выяснению смысла логических связок, которые часто входят в формулировки.

2. Предлагать обучающимся задания, требующие нестандартного использования условия теоремы. Например:

- почему углы при основании равнобедренного треугольника всегда острые?
- ответьте: «Почему чайник круглой формы остывает медленней, чем чайник такого же объема, но другой формы?»
- как, не измеряя углов четырехугольного участка земли, убедиться в том, что он имеет форму квадрата?

3. Проводить работу по отработке смысла кванторов общности и существования. Например, задание может быть следующим: «Запишите с помощью слов «все» или «существует» следующие высказывания:

- а) некоторые реки впадают в Каспийское море;
- б) по крайней мере одно четное число делится на 8;
- в) ни одна собака не умеет мяукать» [11].

Обобщая все используемые на данном этапе изучения теоремы задания, можно выделить три большие группы упражнений, являющихся средством реализации рассматриваемого этапа и отвечающих требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенные виды упражнений, деятельность обучающихся в процессе их выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 2

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на III этапе с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
• на выделение условия и заключения теоремы;	В процессе изучения формулировки теоремы внимательно читают её с целью выделения из неё условия и заключения теоремы, разделяют на части,	Выбирать вид чтения в зависимости от цели, извлекать необходимую информацию. Вид ПУУД: смысловое чтение.

Продолжение таблицы 2

	характеризуют каждую из частей, выделяют логическую структуру. Кроме того, при работе с краткой записью теоремы представляют информацию в виде схемы, устанавливают связи между частями теоремы.	Разделять объект на части; характеризовать части этого объекта Вид ПУУД: анализ объектов. Представлять информацию в виде схем; устанавливать связи между объектами и их частями. Вид ПУУД: структурирование знаний.
<ul style="list-style-type: none"> • на распознавание ситуаций, удовлетворяющих теореме; • на выполнение чертежей, моделирующих условие теоремы. 	В процессе работы над чертежом выделяют существенные характеристики объекта, которые удовлетворяли бы условию теоремы, моделируют при помощи чертежа условие теоремы.	Выделять существенные характеристики объекта (пространственно-графические); Умение преобразовать объект в модель, в которой будут отражены его существенные признаки. Вид ПУУД: знаково-символические действия. Устанавливать наличие у объекта выделенных существенных признаков и связей между ними; умение делать вывод о принадлежности объекта данному понятию (всеми ли существенными признаками и связями между ними обладает исследуемый объект). Вид ПУУД: подведение под понятие.

IV этап – запоминание формулировки теоремы.

На данном этапе в целях облегчения запоминания формулировок теорем целесообразно поэлементное усвоение содержания теоремы. Для этого формулировка теоремы разбивается на отдельные элементы (в тексте элементы отделяются вертикальной чертой). После разбиения формулировки выполняются упражнения на распознавание ситуаций, удовлетворяющих условию теоремы, с последовательным использованием каждого элемента [32].

Таким образом, на данном этапе изучения теоремы задания, можно выделить одну группу упражнений, которая является средством реализации рассматриваемого этапа и отвечает требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенный вид упражнений, деятельность обучающихся в процессе его выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 3

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на IV этапе с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
• на поэлементное усвоение содержания формулировки теоремы (запоминание формулировки)	В процессе работы читают формулировку теоремы с целью разделения её на отдельные элементы. При выполнении упражнения извлекают необходимую информацию из прослушанной/прочитанной формулировки, строят осознанное речевое высказывание.	Выбирать вид чтения в зависимости от цели, извлекать необходимую информацию. Вид ПУУД: смысловое чтение. Вид ПУУД: осознанное построение речевого высказывания;
	В ходе выполнения упражнения устанавливают наличие у объектов, данных в упражнении, существенных признаков, отраженных в каждом элементе формулировки.	Устанавливать наличие у объекта выделенных существенных признаков и связей между ними; умение делать вывод о принадлежности объекта данному понятию (всеми ли существенными признаками и связями между ними обладает исследуемый объект). Вид ПУУД: подведение под понятие.

V этап - ознакомление со способом доказательства.

Работа на данном этапе связана с поиском способа доказательства теоремы. Методами доказательства, которые чаще всего встречаются в школьном курсе математики, являются синтетический, аналитический (нисходящий и восходящий анализ) методы, метод от противного.

Сущность метода от противного заключается в следующем: доказательство теоремы начинают с предположения, что $(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)})$, далее из данного утверждения $\overline{B(x)}$ выводят следствия до тех пор, пока не получат следствие $B_n(x)$, находящееся в противоречии либо с условием теоремы, либо с ранее доказанным теоретическим фактом.

При синтетическом методе доказательства теоремы цепочка рассуждений строится так, что мысль движется от условия теоремы к её заключению.

При аналитическом методе доказательства теоремы цепочка

рассуждений строится так, что мысль движется от заключения теоремы к её условию. Различают два вида аналитического метода: восходящий анализ и нисходящий анализ. При восходящем анализе, отталкиваясь от заключения, подбирают для него достаточное условие. Таким образом, восходящий анализ определяется следующим рассуждением: “для того, чтобы было верно $B(x)$, достаточно, чтобы было верно $B_1(x)$, и т.д. ” При нисходящем анализе, отталкиваясь от заключения, подбирают для него необходимые условия [11].

Синтетический и аналитический методы доказательства имеют как преимущества, так и недостатки. К достоинствам синтетического метода следует отнести сжатость, краткость, полноту. Недостатком является то, что при использовании синтетического метода для обучающихся является непонятным, как можно обнаружить такое доказательство, почему в рассуждениях поступают так, а не иначе; не аргументируется необходимость тех или иных дополнительных построений. Помимо трудностей, связанных с проведением соответствующих шагов доказательства при использовании синтетического способа, возникает дополнительная трудность – поиск исходно истинного утверждения. Используя аналитический метод, обучающиеся действуют сознательно и убежденно, им известно от чего отталкиваться, дополнительные построения мотивированы. Аналитический метод позволяет найти путь доказательства, но он требует больших затрат времени и не всегда возможен. Поэтому, на практике проведения доказательств, целесообразно последовательно применять оба способа: аналитическим путем легко обнаружить нужное истинное утверждение, которое можно принять за исходное, а уже синтетическим путем провести требуемое доказательство.

С целью поиска способа доказательства теоремы используются следующие методические приемы [16]:

1. Решение математической задачи, близкой по методу решения к данной теореме, или доказательство леммы, «наводящих» на метод доказательства новой теоремы.

2. Выполнение практической или лабораторной работы, в ходе которой «открывается» метод доказательства новой теоремы.

3. Повторение ранее изученных теорем, каким-либо образом связанных с данной теоремой и методов их доказательства.

4. Использование общего приема поиска доказательства, например, посредством использования нисходящего анализа.

5. Составление на основе поиска плана (схемы) доказательства.

Возможно также использование следующих эвристических приемов для поиска способа доказательства: аналогии, обобщения, приема опорных задач, приема достраивания фигуры, введения нового неизвестного, разбиения задачи на подзадачи, установление «родственных отношений» между объектами и т. д.

Например, доказательство теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника опирается на следующий прием: чтобы сравнить два угла, надо ввести в рассмотрение третий угол, связанный с этими двумя углами. Этот прием широко используется при доказательстве многих теорем. Открыть его обучающиеся могут, выполняя упражнение: «На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $AB = BD$. Доказать, что $\angle BAD > \angle C$ ». Данное упражнение имеет широкий целевой спектр: знакомит обучающихся с новым способом доказательства, актуализирует знания и умения, необходимые при доказательстве теоремы [30].

Таким образом, обобщая все используемые на данном этапе изучения теоремы приемы, можно выделить две группы специальных упражнений, являющихся средством реализации рассматриваемого этапа и отвечающих требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенные виды

упражнений, деятельность обучающихся в процессе их выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 4

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на V этапе с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
• на ознакомление со способом доказательства;	Выполняют поиск и выделение информации необходимой для доказательства теоремы.	Определять, какие знания необходимы для решения задач. Вид ПУУД: поиск и выделение необходимой информации.
• на составление плана доказательства.	В зависимости от теоремы, её структуры (совместно с учителем или самостоятельно) определяют наиболее простой способ доказательства, путем сравнения различных способов.	Вид ПУУД: выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий. Вид ПУУД: выбор оснований и критериев для сравнения.
	При построении плана строят логическую цепочку доказательства, представляют её в виде схемы (плана), делают выводы и также строят осознанное речевое высказывание.	Разделять рассуждения на основные компоненты; устанавливать связи между выделенными компонентами; и располагать компоненты в определенной последовательности. Вид ПУУД: построение логической цепочки рассуждений. Представлять информацию в виде схем. Вид ПУУД: структурирование знаний. Вид ПУУД: осознанное построение речевого высказывания.

VI этап – доказательство теоремы.

Работа на данном этапе связана с непосредственным доказательством теоремы, осуществлением плана доказательства, найденного на предыдущем этапе, оформлением доказательства. Это осуществляется с помощью следующих методических приемов [16]:

- 1) выделение всех этапов доказательства согласно составленному плану (схеме или методу) доказательства;
- 2) правильная реализация приемов поиска доказательства, которые на этом этапе стали приемами доказательства;

3) логическое обоснование отдельных умозаключений в цепочке доказательства;

4) проверка правильности использования символики и других записей.

Важным на данном этапе является отработка умения делать запись доказательства, с обоснованием каждого шага. Возможны две формы записи доказательства теоремы. Одна из них состоит в том, что вначале записывается полученный вывод и здесь же в строчку записываются аргументы, на основе которых он был сделан. Другая форма записи предполагает заполнение таблицы [11].

Например, доказательство теоремы «Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия» может быть оформлено в виде следующей таблицы:

Шаги доказательства	Обоснование шагов доказательства
1) $\angle A = \angle A_1$	У подобных треугольников соответственные углы равны
2) $\frac{S}{S_1} = k^2$	По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу
3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$	Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$
4) $\frac{AB}{A_1B_1} = k, \frac{AC}{A_1C_1} = k$	По свойству транзитивности равенств
5) $\frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = k^2$	По свойству верных равенств
6) $\frac{S}{S_1} = k^2$	По свойству транзитивности равенств

Обобщая все используемые на данном этапе изучения теоремы приемы, можно выделить две группы специальных упражнений, которые являются средством реализации рассматриваемого этапа и отвечающих требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенные виды упражнений, деятельность обучающихся в процессе их выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 5

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на VI этапе с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
• моделирующие способ доказательства	Выполняют доказательство теоремы.	составлять цепочки умозаключений, идущих от верных посылок к доказываемым тезисам; устанавливать связи между аргументами, ведущими от условия к заключению (использовать методы доказательства); Вид ПУУД: доказательство.
	Строят логическую цепочку рассуждений	Устанавливать связи между компонентами рассуждения; располагать компоненты в определенной последовательности. Вид ПУУД: построение логической цепочки рассуждений.
	Выполняют запись теоремы, т.е. строят осознанное речевое высказывание в письменной форме, или представляют информацию в виде таблицы.	Представлять информацию в виде таблиц; Вид ПУУД: структурирование знаний. Вид ПУУД: осознанное построение речевого высказывания в письменной форме.

VII этап – применение теоремы.

Работа на данном этапе осуществляется в два подэтапа. Сначала осуществляется закрепление доказательства теоремы, целью которого является повторение формулировки теоремы, идеи и способа доказательства. Для достижения цели можно использовать следующие задания [11, 32]:

1. Сформулировать теорему. Какие понятия используются в формулировке теоремы?
2. Назовите теоремы, которые использовались при доказательстве теоремы. Какова цель их использования?
3. На какой теоретический материал, кроме теорем, опирались при доказательстве?
4. Выделите идею доказательства, основные этапы доказательства.
5. На индивидуальных карточках (или на доске) представлена запись

доказательства теоремы только в виде выводов, без соответствующей аргументации. Приведите большую и меньшую посылку для каждого вывода.

6. На индивидуальных карточках (или на доске) представлена запись доказательства теоремы с пропусками как выводов, так и аргументации. Заполните пропуски в доказательстве теоремы.

После закрепления доказательства теоремы переходят ко второму подэтапу, который связан с формированием у обучающихся умений и навыков по применению теоремы к решению задач, т.е. к закреплению теоремы.

Задачи, к которым применима отрабатываемая теорема, должны быть разнообразны как по содержанию, так и по методам решения. Сначала для отработки теоремы обучающимся следует предлагать алгоритмические задачи, решение которых предполагает непосредственное применение теоремы. Затем для отработки теоремы обучающимся должны быть предложены задачи полуалгоритмического и эвристического характера [11]. Например, в теме «Площади многоугольников» к различным видам задач следует отнести:

- алгоритмическая: «Вычислить площадь трапеции, если её основания равны 3 см, 6 см, а высота 2 см»;
- полуалгоритмическая задача: «Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135° , а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Вычислить площадь трапеции»;
- эвристическая: «Доказать, что стороны треугольника пропорциональны его высотам». (В этой задаче эвристика достигнута за счет того, что ни в условии, ни в заключении не идет речь о площади, но для её решения нужно применить понятие площади).

Также для закрепления теоремы полезны задачи, имеющие прикладной характер. Например, для отработки признаков подобия треугольников можно предложить такую задачу: «Земельный участок имеет форму треугольника со сторонами 50, 60 и 70 м, а соответствующие стороны на плане равны 5,6 и 7,5 см. Верно ли начерчен план?» [11].

Таким образом, обобщая все используемые на данном этапе изучения теоремы задания, можно выделить три группы специальных упражнений, являющиеся средством реализации рассматриваемого этапа и отвечающих требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенные виды упражнений, деятельность обучающихся в процессе их выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 6

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на VII этапе с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
<ul style="list-style-type: none"> • на усвоение метода (приема) доказательства; • на выделение в доказательствах недостающих утверждений и их обоснований. 	<p>В процессе закрепление доказательства теоремы и её применения строят осознанное речевое высказывание в устной и письменной форме.</p> <p>При закреплении доказательства теоремы производят осмысление способа доказательства, его основной идеи, последовательности рассуждений, а также основных теоретических фактов, используемых при доказательстве.</p> <p>Заполняют пропуски в доказательстве.</p>	<p>Виды ПУУД: осознанное речевое высказывание в устной и письменной форме; рефлексия способов и условий действия;</p> <p>Определять исходные условия по заданным логическим суждениям; определять условия по заданным исходным данным и конечному результату.</p> <p>Вид ПУУД: установление причинно следственных связей.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • на применение теоремы. 	<p>При решении задач выбирают наиболее эффективные способы решения в зависимости от изученной теоремы; производят доказательство (при решении соответствующих задач); устанавливают причинно-следственные связи между условием и вопросом задачи, получают информацию из чертежа; устанавливают связи между фигурой, заданной в условии задачи, и его элементами, определяют недостаточную для решения задачи информацию. Также при решении задач, имеющих прикладной характер, выделяют существенные характеристики объекта и строят модель, к которой можно будут применить изученную теорему.</p>	<p>Вид ПУУД: выбор наиболее эффективных способов решения задач; выбор оснований и критериев для сравнения знаково – символические действия; анализ объектов; построение логической цепочки рассуждений; доказательство; постановка и решение проблемы.</p>

VIII этап – установление связи с другими теоремами.

Работа на данной этапе связана с выполнением упражнений на установление связей между изученными теоремами, на усвоение системы теорем. Эти связи выясняются как путем анализа учебного материала, так и путем анализа самого доказательства. Полезно составление «родословной» доказательства теоремы (сводя используемые предложения к аксиомам), использование упражнений на группирование теорем по приемам их доказательства [32].

На данном этапе изучения теоремы задания можно выделить две группы упражнений, являющиеся средством реализации рассматриваемого этапа и отвечающих требованиям, выделенным в пункте 1.2. Соотнесем выделенные виды упражнений, деятельность обучающихся в процессе их выполнения с формируемыми умениями и соответствующим видом ПУУД.

Таблица 7

Соотнесение деятельности обучающихся в ходе выполнения упражнений на VIII этапе с формируемыми умениями

Виды упражнений	Деятельность обучающихся	Умение (вид ПУУД)
<ul style="list-style-type: none"> • на систематизацию теорем; • на составление родословной теоремы. 	<p>В процессе выполнения упражнений анализируют учебный материал или доказательство теоремы с целью выяснения вопроса о том, с какими ранее изученными теоремами связана данная теорема. Выделяют основание для объединения изученных теорем или объединяют по заданному основанию. Кроме того, осуществляют классификацию теорем, сравнивают их с целью установления различий в приемах доказательства; располагают теоремы в зависимости от порядка их появления и важности при изучении всей группы теорем.</p>	<p>Виды ПУУД: анализ объектов с целью выделения признаков; синтез; сравнение, сериация и классификация объектов</p>

Важно отметить, что в зависимости от конкретного содержания теоремы, опыта обучающихся отдельные этапы могут опускаться. Так, при изучении теоремы, формулировка которой достаточно проста, может отсутствовать, например, этап запоминания формулировки теоремы.

Кроме того, процессе изучения курса планиметрии (7-9 класс) необходимо проводить пропедевтическую работу по подготовке обучающихся к опровержению. Основные направления этой работы:

- формирование потребности в опровержении ложных утверждений - предлагать обучающимся подумать над вопросами: «Верно ли сформулировано указанное утверждение, нет ли в нем противоречий?», «Можно ли считать данное утверждение верным?» и т.д.

- формирование умения пользоваться контрпримерами - предлагать обучающимся задания вида: а) приведите контрпримеры, доказывающие ложность предложенных высказываний; б) докажите ошибочность определения посредством контрпримеров.

- формирование умения находить ошибки в простейших дедуктивных выводах – следует, например, разбирать ошибки, допущенные обучающимися при решении задач на доказательство: указывать причину появления этих ошибок и исправлять их.

- формирование умения находить ошибки в условии теоремы - предлагать обучающимся неполные или некорректные формулировки, в которых они должны найти ошибки.

- формирование умения выявлять и устранять пробелы в цепочках логических шагов - предлагать обучающимся а) карточки, в которых пропущены шаги доказательства; обучающимся нужно восполнить доказательство; б) найти ошибки в составленном плане доказательства, т.е. указать какие шаги пропущены, почему их пропуск приведет к ошибке, и добавить их.

Таким образом, проанализировав методику работы на каждом этапе изучения теоремы, можно установить соответствие между этапами и формируемыми на них ПУУД. Указанное соответствие представлено на схеме (см. рис 5).

Следовательно, можно сделать вывод, что в процессе доказательства теорем возможно полноценное формирование всех компонентов ПУУД, что делает рассмотрение доказательства теорем важным и значимым для достижения современных результатов обучения.



Рис. 5. Сопоставление этапов изучения теоремы с формируемыми познавательными универсальными учебными действиями

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

В первой главе в ходе анализа литературы по теме исследования были выявлены различные подходы к определению понятия «познавательные универсальные учебные действия». Анализ этих подходов позволил выделить основные признаки данного понятия, на основании которых познавательные универсальные учебные действия были определены как действия, обеспечивающие познание, включающее в себя поиск необходимой информации, работу с полученной информацией, обработку информации и ее использование, как в рамках образовательного процесса, так и в жизненных ситуациях.

В ходе исследования были рассмотрены различные подходы к классификации познавательных универсальных учебных действий. Анализ данных подходов, позволил установить, что все рассматриваемые классификации имеют сходную структуру и основываются на классификации А.Г. Асмолова, которая и была принята за основную в данном исследовании. В процессе рассмотрения компонентов познавательных универсальных учебных действий, был конкретизирован их пооперационный состав, т.е. выделены простые операции, входящие в состав рассматриваемых действий. Отмечено, что выделенный пооперационный состав познавательных универсальных учебных действий дает возможность устанавливать соответствие между ними и деятельностью обучающихся, которая направлена на их формирование.

На основании сконструированного определения познавательных универсальных учебных действий было определено такое средство для их формирования, как теорема, поскольку в процессе обучения ее доказательству и применению возможно организовать работу по поиску необходимой информации, её обработке и использованию. Рассмотрение различных подходов к определению понятия «обучение доказательству» позволило

установить, что наиболее полно отражает все аспекты данного процесса определение Г.И. Саранцева: «обучение доказательству - обучение учащихся анализу готовых доказательств, их воспроизведению, самостоятельному открытию факта, поиску и конструированию доказательства, а также опровержению предложенных доказательств». Отмечено, что процесс изучения теоремы включает в себя определенные этапы. Организация процесса изучения теоремы, в соответствии с этими этапами дает возможность осуществлять эффективное обучение доказательству математических утверждений, т.е. формировать у обучающихся умения, составляющие основу деятельности по доказательству утверждений.

Анализ методики работы на каждом из этапов изучения теоремы (приемов, основных упражнений), а также особенностей организации этого процесса позволил определить те действия обучающихся, которые они выполняют на данных этапах, что в свою очередь позволило установить соответствие между этапами и формируемыми на них познавательными универсальными учебными действиями. Данное сопоставление представлено в виде схемы, которая демонстрирует, что в процессе доказательства теорем возможно полноценное формирование всех компонент познавательных универсальных учебных действий, и обосновывает целесообразность использования этого процесса с целью формирования рассматриваемого вида универсальных учебных действий.

ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ

2.1. Анализ познавательной сферы обучающихся 10-11 классов

Рассмотрим особенности познавательной сферы обучающихся 10-11 классов и выделим те характеристики, которые необходимо учитывать в процессе организации их учебной деятельности.

В российской психологии обучающихся 10-11 классов, т.е. старший школьный возраст, относят к такому возрастному периоду в развитии человека, как ранняя юность, которая длится от (14)15 до 18 лет [2].

Обучение в старших классах школы связано со значительным изменением и усложнением содержания учебного материала, увеличением его объема, что повышает уровень требований к обучающимся. От них ожидают достаточной сформированности теоретического мышления, гибкости, универсальности, продуктивности познавательной деятельности, четкости, самостоятельности в решении когнитивных задач [2].

В ранней юности учение продолжает оставаться одним из главных видов деятельности старшеклассников. У большинства старшеклассников, по сравнению с подростками, интерес к учению повышается. Учебу они начинают рассматривать как средство реализации жизненных планов, как необходимую базу, предпосылку будущей профессиональной деятельности [2].

К концу подросткового возраста общие умственные способности уже сформированы, поэтому на протяжении юности происходит формирование индивидуального стиля умственной деятельности, т.е. устойчивых совокупностей индивидуальных вариаций в способах восприятия, запоминания и мышления, за которым стоят различные пути приобретения, накопления, переработки и использования материала [2].

В этом возрасте продолжается развитие абстрактно-логического мышления. У обучающихся 10-11 классов совершенствуется владение сложными интеллектуальными операциями анализа и синтеза, теоретического обобщения и абстрагирования, аргументирования и доказательства. Для них становится характерными установление причинно-следственных связей, систематичность, устойчивость и критичность мышления [29]. Они располагают уже достаточно большим запасом знаний, причем знаний проанализированных, обобщенных [40]. В этом возрасте происходит усвоение понятий, формируется и доводится до состояния рабочего инструмента умение формулировать понятия и оперировать понятийным аппаратом [40]. Совершенствуется теоретическое мышление.

У обучающихся 10-11 классов происходит совершенствование памяти. Это относится не только к тому, что в целом увеличивается объем памяти, но и к тому, что в значительной мере меняются способы запоминания. Наряду с произвольным запоминанием у обучающихся наблюдается широкое применение рациональных приемов произвольного запоминания материала [2]. Возрастает продуктивность запоминания абстрактного материала, память становится высоко произвольной и хорошо управляемой [26]. Другими словами, старшеклассники, по сравнению с обучающимися других возрастных групп, обладают более устойчивым контролем над процессами памяти: они могут свободнее запоминать, сохранять и воспроизводить в памяти выученный школьный материал [28].

Кроме указанного выше следует отметить и особенности внимания старшеклассников. В этом возрасте преобладает произвольное внимание, старший школьник может легко сосредоточиться на предмете деятельности, владеет приемами переключения внимания, может самостоятельно его организовывать [2].

Еще одна возрастная особенность обучающихся 10-11 классов заключается в быстром развитии специальных способностей, часто связанных

с выбираемой профессиональной областью (математических, технических, педагогических и др.) [2].

Наряду уже с указанными особенностями познавательной сферы обучающихся 10-11 классов, необходимо отметить и те особенности, которые присущи им как представителям нового поколения - поколения «цифровых» детей.

На сегодняшний день исследователи выделяют важную и отличительную особенность мышления современных обучающихся – это «клиповость» мышления, т. е. способность воспринимать мир через короткие яркие образы и послания, например, через ленту теленовостей, небольших статей или коротких видеоклипов [19]. Такая особенность мышления современных обучающихся появилась в связи с широким распространением мобильной связи, средств массовой информации – телевидение и Интернет, которые широко применяют приемы «клиповой» эстетики, формируя человека, обладающего новым визуальным восприятием. «Клиповое мышление» — это процесс отражения множества разнообразных свойств объектов, без учета связей между ними, характеризующийся фрагментарностью информационного потока, алогичностью, полной разнородностью поступающей информации, высокой скоростью переключения между частями, фрагментами информации, отсутствием целостной картины восприятия окружающего мира [3]. В связи с этим, существует такая тенденция – неспособность многих обучающихся системно воспринимать информацию, системно мыслить и, соответственно, излагать свои мысли. Часто после произнесенной (написанной) фразы, обучающийся не пытается понять ее целиком, а выхватывает кусок-раздражитель, на который у него уже готов заранее ответ [28].

Особенностью современных обучающихся является наиболее развитая кратковременная память, которая является хранилищем небольших порций информации. Такая особенность связана с тем, что современному школьнику,

имеющему возможность в любое время открыть информационные ресурсы и найти нужный материал нет смысла хранить ее в своей памяти. Изменяется у обучающихся и структура мнемонических процессов: современные школьники, в том числе и старшеклассники, запоминают не содержание, а место, где находится какая-либо информация [28].

Следует также отметить особенности внимания современных обучающихся. В нашей стране исследование особенностей внимания старшеклассников, как представителей цифрового поколения, только начинаются. Фундаментальные исследования указанного вопроса на данный момент существуют только за рубежом. На основе зарубежных исследований можно сказать, что устойчивость внимания у школьников уменьшается в десятки раз по сравнению с предыдущим поколением, а вот переключение и распределение внимания развиты на достаточно высоком уровне. Это тоже связано с клиповым мышлением [28]. Другими словами, современные обучающиеся быстро обрабатывают информацию, мгновенно могут переключаться с одного вида деятельности на другой, а также действовать в условиях многозадачности, т.е. выполнять несколько действий одновременно. Однако важно отметить и существенный недостаток способности к многозадачности – это повышенная возбудимость, впечатлительность, неусидчивость, суетливость и, в крайних случаях, – гиперактивность [19].

Таким образом, на основании вышесказанного можно выделить следующие характеристики обучающихся 10-11 классов:

- 1) развитие абстрактно-логического мышления;
- 2) совершенствование теоретического мышления (склонность к теоретизированию, созданию абстрактных обобщений);
- 3) развитие критического мышления;
- 4) наличие «клипового» мышления;
- 5) формирование понятийного аппарата;

6) увеличение объема памяти, применение рациональных приемов произвольного запоминания материала;

7) наличие более развитой кратковременной памяти;

8) развитие внимания: высокая переключаемость, распределяемость и устойчивость внимания, что обуславливает достаточно продуктивный и высокий темп работы;

9) наличие способности действовать в условиях многозадачности;

10) развитие общих интеллектуальных способностей, а также специальных способностей, которые связаны с будущей профессией.

2.1. Требования к организации процесса обучения доказательству теорем, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся

В ходе теоретического исследования, проведенного в главе 1, было установлено, что в процессе доказательства теоремы у обучающихся формируются такие умения, как построение самостоятельного процесса поиска, исследования; анализ ситуации, условий; постановка проблемы; установление причинно-следственных связей; выдвижение и обоснование гипотезы; выбор методов; составление плана решения (доказательства теоремы); построение логической цепочки рассуждений и т.д., которые являются компонентами ПУУД.

На основе данных выводов, а также с учетом результатов, полученных в п. 2.2 сформулируем требования к организации процесса обучения доказательству теорем, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся 10-11 классов.

1. Включение в процесс изучения теоремы следующих этапов: мотивация изучения теоремы; ознакомление с фактом, отраженным в теореме; усвоение содержания теоремы, её структуры; запоминание формулировки теоремы; ознакомление со способом доказательства теоремы; доказательство теоремы; применение теоремы; установление связей теоремы с ранее изученными теоремами.

Указанная последовательность этапов дает возможность осуществлять эффективное обучение доказательству теорем, а именно обучение самостоятельному поиску ответов на вопросы «зачем, что и как надо доказывать?». Другими словами, предоставляет возможность обучать самостоятельному установлению факта, отраженного в теореме, осуществлению поиска способа доказательства, конструированию доказательства, а также применению теоремы в различных ситуациях.

2. Исключение из процесса изучения теоремы этапа запоминания формулировки.

Установление данного требования обусловлено возрастными особенностями памяти обучающихся 10-11 класса, выделенных в пункте 2.1. Обучающиеся данного возраста обладают более устойчивым контролем над процессами памяти: они могут свободнее запоминать и сохранять в памяти выученный материал, сознательно используя для этого смысловые приемы запоминания (например, деление на смысловые единицы, смысловая группировка и т.д.), а также воспроизводить его. Деятельность обучающихся на этапе усвоения содержания теоремы позволит им осмысленно запомнить изучаемую формулировку, поскольку в процессе работы над ней обучающиеся выделяют условие и заключение, устанавливают связи между ними, выполняют чертеж, моделирующий условие теоремы (привлекается зрительная память), структурируют материал в процессе составления краткой записи. Таким образом, обучающимся для осознанного запоминания формулировки не требуется выполнять дополнительных действий - формулировка будет усваиваться в процессе усвоения содержания теоремы, её структуры.

Исключение этапа запоминания формулировки не повлияет на деятельность по формированию ПУУД, поскольку в процессе выполнения упражнений на данном этапе происходит формирование тех же компонент ПУУД, что и на этапе усвоения содержания теоремы и её структуры.

3. Включение в процесс изучения теоремы этапа, содержание которого предполагает обучение обучающихся самостоятельному опровержению готовых доказательств.

Включение данного этапа связано с тем, что согласно выбранному подходу к сущности понятия «обучение доказательству», данный процесс включает в себя не только обучение самостоятельному открытию факта,

поиску и конструированию доказательства, но и обучение опровержению готовых доказательств.

Формирование умения опровергать предложенные доказательства будет эффективно, поскольку в качестве возрастной особенности обучающихся 10-11 классов, выделенной в пункте 2.1., отмечается развитие критического мышления, которое обуславливает потребность оценивать, контролировать, сомневаться, опровергать различные факты.

Умение опровергать готовые доказательства составляют умения опровергать тезис, аргументы и демонстрацию, каждое из которых есть владение определенными приемами, т.е. совокупностями действий, выполняемых в определенном порядке и служащих для решения определенных задач [34]. Формирование умения применять приемы опровержения доказательства будет способствовать развитию у обучающихся 10-11 классов ПУУД. Для доказательства данного утверждения рассмотрим различные приемы опровержения тезиса, аргументов и демонстрации.

Опровержение тезиса направлено на показ его ложности или сомнительности и может быть осуществлено следующими приемами [34]:

- 1) «приведение контрпримера»: необходимо найти хотя бы один объект, для которого условие окажется истинным, а заключение – ложным;
- 2) опровержение утверждения (доказательство истинности отрицания тезиса): опровержение осуществляется посредством доказательства истинности утверждения, противоречащего исходному;
- 3) изучение следствий тезиса: из тезиса выводится следствие, противоречащее заведомо истинному положению.

Опровержение аргументов направлено на выявление ложности или необоснованности аргументов и может быть осуществлено с помощью следующих приемов [34]:

- 1) проверка истинности используемых аргументов;
- 2) проверка доказанности используемых аргументов;

3) проверка достаточности аргументов: проверка, что из указанных аргументов можно вывести требуемое заключение;

4) проверка независимости аргументов от доказываемого утверждения: выявление того, что приведенные аргументы не являются следствием исходного тезиса;

Опровержение демонстрации направлено на выявление логических ошибок в рассуждениях - указывается на отсутствие необходимой логической связи между аргументами и тезисом, а также выявляется степень общности обоснования (выяснение полноты доказательства) [14].

Проанализировав сущность каждого приема и действий, входящих в их состав, установим соответствие между деятельностью обучающихся, в процессе применения конкретного приема и компонентами ПУУД, которые будут формироваться в ходе данной деятельности. Указанное соответствие представлено на схеме (см.рис 6).



Рис.6. Сопоставление приемов опровержения доказательства с формируемыми познавательными универсальными учебными действиями

На основании установленного соответствия можно сделать вывод, что обучение опровержению готовых доказательств будет способствовать формированию ПУУД обучающихся 10-11 классов.

В пункте 1.3. были указаны основные направления пропедевтической работы по подготовке обучающихся к опровержению готовых доказательств. При условии реализации в процессе обучения доказательству данных направлений, деятельность по формированию умения опровергать готовые доказательства в процессе обучения доказательству теорем непосредственно в 10-11 классах будет заключаться в формировании умения применять приемы опровержения составных частей доказательства и в обучении самостоятельному опровержению предложенного доказательства.

Приведем примеры заданий направленных на формирование умения применять приемы опровержения доказательства и умения самостоятельно опровергать доказательства.

Для обучения приемам опровержения составных частей доказательства необходимо:

1) рассказывать обучающимся, что каждое доказательство состоит из трех частей, к каждой из которых предъявляются определенные требования, нарушение которых приводит к ошибкам; на выявление этих ошибок направлена деятельность по опровержению доказательства;

2) рассказывать, что проверке на истинность могут быть подвергнуты все три составные части доказательства: тезис (формулировка теоремы), аргументы (факты, использованные при обосновании тезиса), демонстрация (способы связи фактов в логически стройную последовательность);

3) акцентировать внимание обучающихся, что для опровержения тезиса, аргументов и демонстрации существуют конкретные приемы, для овладения которыми необходимо выполнять специальные упражнения.

Для составления упражнений на формирование умения применять конкретный прием опровержения необходимо:

1) выделить действия, которыми нужно овладеть обучающимся для того, чтобы овладеть конкретным приемом опровержения;

2) составить систему упражнений на отработку каждого действия;

Рассмотрим, например, систему упражнения, направленную на формирование у обучающихся умения применять прием проверки независимости аргументов. Овладение данным приемом предполагает овладение обучающимися следующими действиями: 1) выделением в предложенном доказательстве теоремы последовательности всех аргументов, приведенных в защиту тезиса; 2) установлением «природы» каждого аргумента; 3) определением зависимости каждого доказываемого аргумента от исходного тезиса [18].

Для отработки первого действия целесообразно использовать следующие упражнения:

I. Прочитайте внимательно предложенное доказательство. Выделите условие и заключение доказываемого утверждения. Перечислите все аргументы, приведенные в защиту тезиса.

Для отработки второго действия необходимо предлагать обучающимся упражнения, подобные следующему:

II. Докажите предложенное утверждение. Сколько аргументов Вы привели в защиту тезиса? Выпишите все аргументы. Установите, чем является каждый аргумент – аксиомой, определением, теоремой, следствием из теоремы или определения, условием.

Для отработки третьего действия следует предлагать следующие упражнения:

III. Прочитайте доказательство. Выделите аргументы в доказательстве. Выявите суждения, которые являются следствиями доказываемого утверждения. Можно ли считать такое доказательство правильным?

После отработки всех действий, составляющих указанный прием опровержения, и последовательности их применения становится возможным

выполнение обучающимися упражнений, содержащих требования применить конкретный (изученный) прием для опровержения предложенного доказательства:

IV. Используя прием проверки независимости аргументов, опровергните предложенное доказательство утверждения.

Упражнения для формирования умения применять другие приемы опровержения конструируются аналогично.

После отработки каждого приема в отдельности целесообразно проведение работы по формированию умения самостоятельно опровергать предложенное доказательство. Начинать данную работу следует с организации обсуждения с обучающимися вопроса о том, какие действия и в какой последовательности необходимо выполнять, чтобы опровергнуть предложенный тезис или его доказательство. В ходе обсуждения указанного вопроса целесообразно составления алгоритма для проверки справедливости доказательства некоторого утверждения. После составления алгоритма необходимо предлагать обучающимся упражнения на его отработку, т.е. упражнения, содержащие требование или опровергнуть предложенное доказательство (без каких-либо указаний на прием опровержения), или показать истинность данного доказательства. Например:

V. Установите истинность или ложность предложенного доказательства. Укажите, какие приемы вы использовали?

4. Организация самостоятельной деятельности обучающихся в процессе изучения теоремы.

Установление данного требования обусловлено тем, что в рамках реализации требований ФГОС СОО необходимо создавать условия для развития личности обучающегося, формирования у него готовности к самообразованию, т.е. формирования таких умений, которые в дальнейшем должны позволить обучающемуся самостоятельно изучать что-либо, осваивать новые виды деятельности. Другими словами, необходимо

формировать у обучающихся такие умения, как самостоятельно находить, обрабатывать и использовать информацию, самостоятельно решать учебные и жизненные проблемы. Для этого требуется таким образом организовать образовательный процесс, чтобы большая часть учебного времени отводилась систематической, целенаправленной самостоятельной деятельности обучающихся. Такая организация образовательного процесса позволит сформировать у обучающихся следующие умения, являющиеся компонентами деятельности по самообразованию [43]:

- самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, формулирование проблемы;
- поиск и выделение необходимой информации (определение основной и второстепенной информации);
- выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий (самостоятельное создание алгоритмов деятельности для решения проблем творческого и поискового характера, действие со знаково-символическими средствами: замещение, кодирование, декодирование, моделирование);
- рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности и другие.

Все указанные умения являются компонентами ПУУД, которые, как было установлено в ходе теоретического исследования, формируются в процессе обучения доказательству теорем. Таким образом, организация самостоятельной деятельности обучающихся в процессе изучения теоремы будет способствовать формированию компонент ПУУД.

Самостоятельное выполнение заданий следует обеспечить в процессе работы на первом и втором этапах изучения теоремы, содержание которых предполагает проведение учебного исследования, одной из характеристик которого является самостоятельность обучающихся при выполнении задания. Организация самостоятельной деятельности будет способствовать

формированию таких умений, как самостоятельное формулирование познавательных целей, проблемы исследования; самостоятельное создание алгоритмов для решения сформулированной проблемы.

Также формированию ПУУД, а именно умения самостоятельно осуществлять смысловое чтение, анализ формулировки теоремы, подведение под понятие, структурирование знаний и применение знаково-символических действий (моделирование при помощи чертежа условия теоремы) будет способствовать организация самостоятельной деятельности обучающихся в процессе усвоения содержания теоремы и её структуры. Организация самостоятельной деятельности на данном этапе возможна, поскольку изучение и анализ формулировки выполняется по конкретному плану, которым каждый из обучающихся к этому времени владеет и, следовательно, может выполнять пункты этого плана без помощи учителя.

В процессе поиска способа доказательства также необходима организация самостоятельной деятельности обучающихся, поскольку она позволит формировать у них такие умения как, самостоятельный поиск и выделения информации, необходимой для доказательства теоремы; самостоятельный выбор наиболее эффективных методов и приемов доказательства, в зависимости от содержания теоремы. Важно отметить, что организация самостоятельной деятельности возможна только в том случае, если метод или прием, использующиеся для доказательства теоремы, применялись раньше и структура доказательства обучающимся знакома, т.е. обучающиеся способны применить тот же алгоритм доказательства уже к новой теореме и составить план доказательства. Если же метод или прием доказательства применяются впервые, то необходимо осуществлять их разбор совместно с учителем.

Процесс записи доказательства теоремы также может быть организован как самостоятельная работа. Такая организация деятельности дает возможность формирования умения самостоятельно устанавливать причинно-

следственные связи, строить логическую цепочку рассуждений, доказывать математическое утверждение; самостоятельно и осознанно строить грамотное высказывание в письменной форме.

5. Организация учебного исследования в процессе изучения теоремы

Установление данного требования обусловлено тем, что все познавательные умения эффективно формируются при такой организации обучения, когда обучающиеся систематически вовлекаются в исследовательскую деятельность по ходу усвоения программных знаний. Такая форма организации деятельности обучающихся является базой для формирования основных исследовательских умений, которые входят в состав ПУУД.

Структура учебного исследования по математике включает в себя такие этапы, как мотивация учебной деятельности; постановка проблемы исследования; анализ имеющейся информации по рассматриваемому вопросу; экспериментирование (проведение измерений, испытаний и т.д.) с целью получения фактического материала; систематизация и анализ полученного фактического материала; выдвижение гипотез; подтверждение или опровержение полученных гипотез; доказательство гипотез [12]. Включение всех выше перечисленных этапов в процесс обучения доказательству теорем возможно на первых этапах работы с теоремой (мотивация изучения теоремы; ознакомление с фактом, отраженным в теореме), а также на этапах поиска способа доказательства и непосредственно доказательства.

Организация учебного исследования в процессе изучения стереометрии в 10-11 классах, направленного на формирование ПУУД, будет результативна, т.к. согласно пункту 2.1 в этом возрасте совершенствуется владение сложными интеллектуальными операциями анализа и синтеза, теоретического обобщения и абстрагирования, аргументирования и доказательства; становится характерными установление причинно-следственных связей.

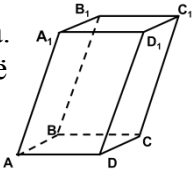
Например, при изучении стереометрии целесообразно организовать учебное исследование, в ходе которого обучающиеся придут к соотношению между числом вершин, граней и ребер для любого выпуклого многогранника, выражаемого теоремой Эйлера.

Таким образом, можно сделать вывод, что выстраивание процесса обучения доказательству с учетом указанных требований будет способствовать формированию познавательных универсальных учебных действий у обучающихся 10-11 классов.

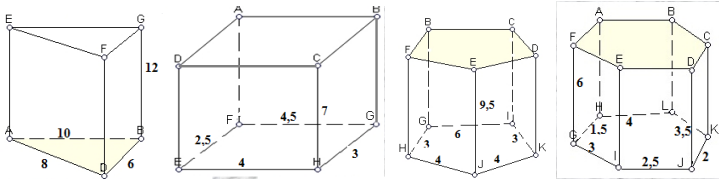
2.3. Система конспектов уроков

Таблица 8

Урок №1 на тему: «Площадь боковой поверхности прямой призмы»

Цель урока	Формирование знания о формуле для вычисления площади боковой поверхности прямой призмы.		
Планируемые результаты обучения	Личностные: готовность и способность к самостоятельной, творческой деятельности; готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию; навыки сотрудничества со сверстниками в образовательной деятельности.		
	Предметные: овладение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; умение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры.		
	Метапредметные: формирование компонентов познавательных УУД.		
Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
1. Организационный момент	Приветствует обучающихся, настраивает на продуктивную работу	Обучающиеся приветствуют учителя, проверяют готовность к уроку.	
2. Актуализация знаний (подготовка к изучению нового материала)	<p>Фронтальный опрос:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Какую тему мы изучаем? 2. С каким многогранником мы познакомились на прошлом уроке? Как он называется? 3. Что такое призма? 4. На рисунке изображена призма. Назовите основания призмы, её боковые грани и боковые ребра. 5. Какая призма называется прямой, а какая наклонной? 6. Что называется площадью полной поверхности призмы? Площадью боковой поверхности? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Тему «Многогранники» 2. На прошлом уроке мы познакомились с многогранником, который называется призма. 3. Призма – это выпуклый многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, лежащих в параллельных плоскостях, и n параллелограммов. 4. Основания: $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$. Боковые грани: ABB_1A_1, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1A_1A. Боковые ребра: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. 5. Призма называется прямой, если её боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется наклонной. 6. Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней, а площадью боковой поверхности призмы – сумма площадей её боковых граней. 	

Этап (ход) урока	Деятельность учителя		Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД	
3.Изучение нового материала					
I этап – мотивация изучения теоремы	На прошлом уроке мы выяснили, что называется площадью полной и боковой поверхности призмы. 1. Как выражается площадь полной поверхности призмы через площадь боковой поверхности? Указанное соотношение часто используется для решения практических задач. Рассмотрим задачу. Предпринимателю для открытия магазина аквариумных рыбок необходимо изготовить 10 аквариумов разного размера. Аквариумы имеют форму прямых призм, в основании которых лежат различные многоугольники с разными значениями длин сторон. При этом высоты аквариумов также различны. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариумов, если они имеют следующие размеры:			<ul style="list-style-type: none">• Постановка и проблемы;• выдвижение гипотезы;• установление причинно-следственных связей (умение находить главное в изучаемом объекте, кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие);• самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели.	
	№	Форма основания	Стороны основания (м)		Высота (м)
	1	Прямоугольный треугольник	Катеты: 0,6, 0,8		1
	2	Равнобедренная трапеция	Осн.трапеции: 0,2; 0,8. Боковая сторона: 0,5		0,7
	3	Прямоугольник	Длина 0,7; Ширина 0,4		0,5
	4	Квадрат	0,3		0,4
	5	Прав.шестиугольник	0,6		1,3
	6	Треугольник	0,5, 0,7; угол между ними 120°		1,5
	7	Трапеция	Основания: 1; 0,4; Бок.стороны: 0,7; 0,5		1,1
	8	Прав.треугольник	0,8		1,4
	9	Ромб	Диагонали: 0,3; 0,7		1,2
	10	Равнобедренный треугольник	Бок.сторона: 0,6; Высота 0,4		1,2
1. Площадь полной поверхности призмы выражается формулой $S_{\text{полн}}=2S_{\text{осн}}+ S_{\text{бок.}}$ 2. Нужно знать, какую площадь имеют стенки аквариума, дно и крышка. 3. Необходимо знать площадь полной поверхности прямой призмы. 4. Для вычисления площади полной поверхности нужно найти площадь основания и площадь боковой поверхности. 5. Да, поскольку нам известны формулы для вычисления площадей многоугольника. Для того чтобы найти площадь боковой поверхности, нужно найти площади каждой боковой грани и сложить их. 6. Да, потому что каждый раз придется находить отдельно площадь каждой боковой грани, потому что все призмы имеют разные размеры. 7. Процесс можно было бы ускорить, если бы была известна формула для вычисления площади боковой поверхности прямой призмы. 8. Для упрощения и ускорения вычислений площади боковой поверхности необходимо знать формулу. Возникает проблема: какова формула для вычисления площади боковой поверхности прямой призмы?					

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>2. Что нужно знать для того чтобы найти количество стекла, необходимое для изготовления аквариумов?</p> <p>3. Если перевести эту задачу на математический язык, то, что нам нужно знать для того, чтобы её решить? Учитывая, что аквариумы имеют форму прямой призмы.</p> <p>4. Как вычислить площадь полной поверхности прямой призмы?</p> <p>5. Сможете ли Вы найти площади двух оснований? Как найти площадь боковой поверхности?</p> <p>6. Учитель вводит проблемную ситуацию: Скажите, много ли времени займет нахождение площади боковой поверхности таким способом?</p> <p>7. Как можно было бы ускорить процесс вычисления?</p> <p>8. Сформулируйте возникшую проблему.</p>		
<p>II этап – ознакомление с фактом, отраженным в теореме</p>	<p>1. Обучающимся предлагается выяснить, чему равна площадь боковой поверхности прямой призмы практическим путем. На рисунке представлены треугольная, четырехугольная, пятиугольная, шестиугольная прямые призмы, у которых известны высоты и стороны основания. Вычислите площадь боковой поверхности известным вам способом. При этом обращайте внимание на то, как можно упростить вычисления в каждом конкретном случае.</p> 	<p>1. Обучающиеся выполняют работу: вычисляют площадь каждой боковой грани и складывают получившиеся площади. При сложении выносят общий множитель (высоту призмы за скобки). Получают следующие результаты:</p> <p>$S_{бок1} = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 12 \cdot 6 = 12(10 + 8 + 6),$</p> <p>$S_{бок2} = 7 \cdot 2,5 + 7 \cdot 4,5 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 7(2,5 + 4,5 + 3 + 4)$</p> <p>$S_{бок3} = 9,5 \cdot 3 + 9,5 \cdot 6 + 9,5 \cdot 3 + 9,5 \cdot 4 + 9,5 \cdot 4 = 9,5(3 + 6 + 3 + 4 + 4),$</p> <p>$S_{бок5} = 6 \cdot 1,5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3,5 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2,5 + 6 \cdot 3 = 6(1,5 + 4 + 3,5 + 2 + 2,5 + 3).$</p>	

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>2. Обратите внимание на выражение получившееся в скобках. Как оно связано с основанием призмы?</p> <p>3. Обратите внимание на общий множитель, который вы вынесли за скобки в каждом случае. Как он связан с призмой?</p> <p>4. Сделайте предположение о том, какова формула для вычисления площади боковой поверхности.</p> <p>5. Скажите, можем ли мы утверждать, что полученный вами результат будет справедлив для любой прямой призмы?</p> <p>6. Сформулируйте, какое предположение (гипотезу) необходимо доказать.</p> <p>7. Мы сформулировали гипотезу, которую можно считать теоремой и установили, что она требует доказательства. Сформулируйте, какова будет цель вашей дальнейшей деятельности.</p> <p>8. Вы знаете, что деятельность по доказательству теорем включает в себя несколько этапов. Скажите, с какого этапа мы начинаем доказательство любой теоремы?</p> <p>9. Сегодня на уроке мы будем работать в рамках данного этапа. Тогда сформулируйте цель сегодняшнего урока?</p>	<p>2. Выражение в скобках является суммой сторон основания призмы, т.е. периметром.</p> <p>3. Этот множитель в каждом случае является высотой призмы.</p> <p>4. Обучающиеся выдвигают предположение, что формула для вычисления площади боковой поверхности представленных призм имеет вид: $S_{бок} = h \cdot P$.</p> <p>5. Нет, поскольку были рассмотрены только четыре частных случая прямых призм. Необходимо выяснить справедливость полученной формулы для произвольной n-угольной прямой призмы.</p> <p>6. Гипотеза: площадь боковой поверхности прямой n-угольной призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.</p> <p>7. Цель будет состоять в доказательстве теоремы о площади боковой поверхности прямой призмы.</p> <p>8. С этапа анализа формулировки.</p> <p>9. Изучить формулировку теоремы и запомнить её</p>	
<p>III этап – усвоение содержания теоремы, её структуры</p>	<p>1. Проанализируйте формулировку теоремы по следующему плану (учитель контролирует правильность выполнения работы):</p> <p>1) прочитайте теорему; выделите условие и заключение и запишите их в виде отдельных предложений;</p> <p>2) уточните условие и заключение, т.е. выясните о каких фигурах идёт речь, сколько их, какие свойства фигуры указаны;</p>	<p>1. Обучающиеся самостоятельно выполняют все пункты плана:</p> <p>1) Условие: площадь боковой поверхности прямой призмы. Заключение: равна произведению периметра основания на высоту.</p> <p>2) Речь формулировке идет про прямую призму и площадь её боковой поверхности.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Структурирование знаний (умение представлять информацию в виде схем); • знаково-символические действия; • анализ объектов;

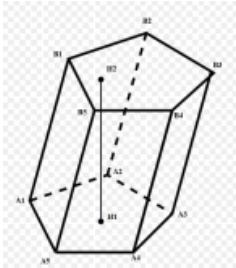
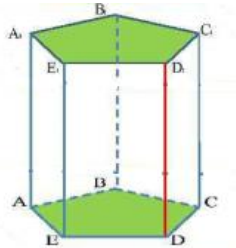
Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>3) сформулируйте теорему в условной форме; 4) выполните краткую запись условия и заключения; проверьте, все ли посылки условия вошли в краткую запись; 5) поменяйтесь выполненными краткими записями с соседом по парте и проверьте, можно ли по его краткой записи условия и заключения восстановить текст математического утверждения; восстановите его, если этого возможно, если нет, то исправьте ошибку. 6) сформулируйте обратное утверждение; выясните, является ли оно теоремой (в случае отрицательного ответа приведите контрпример); 7) определите, верно ли выполнен чертеж, моделирующий условие теоремы</p> <p>А)  Б) </p>	<p>3) Указано свойство площади боковой поверхности, а именно то, что она равна произведению периметра основания на высоту призмы. 4) Если многогранник является прямой призмой, то площадь его боковой поверхности равна произведению периметра основания на высоту. 5) $A_1A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$ — прямая призма, h — высота, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности $\Rightarrow S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$. 6) Обучающиеся меняются краткими записями и выполняют проверку. 7) Обратное утверждение: если площадь боковой поверхности многогранника равна произведению периметра основания на высоту, то этот многогранник является прямой призмой — теорема. 8) Чертеж под буквой А) неверный, т.к. данная призма не является прямой — она наклонная, т.е. не удовлетворяет условию теоремы. Чертеж под буквой Б) верно моделирует условие теоремы, поскольку на чертеже представлена прямая призма.</p>	<ul style="list-style-type: none"> смысловое чтение (осмысление цели чтения; извлечение необходимой информации из прочитанной формулировки).
5.Подведение итогов урока	<p>Рефлексия Закончите предложение: «Сегодня на уроке я узнал...»; «Сегодня мне удалось...»; «У меня получилось...».</p>	Отвечают на вопросы, подводят итоги.	

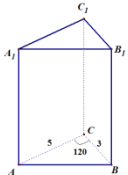
Таблица 9

Урок №2 на тему: «Площадь боковой поверхности прямой призмы»

Цель урока	Формирование умения доказывать теорему о нахождении площади боковой поверхности прямой призмы и применять её формулировку при решении задач.		
Планируемые результаты обучения	Личностные: готовность и способность к самостоятельной, творческой деятельности; готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию.		
	Предметные: владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; умение применять изученные свойства геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием.		
	Метапредметные: формирование компонентов познавательных УУД.		
Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
1.Организационный момент	Приветствует обучающихся, настраивает на продуктивную работу	Обучающиеся приветствуют учителя, проверяют готовность к уроку.	
2. Актуализация знаний (подготовка к изучению нового материала)	Фронтальный опрос: 1. На прошлом уроке мы выполняли практическую работу. Какова была её цель? 2. Какие результаты были получены? 3. Что было сделано на прошлом уроке для доказательства сформулированной теоремы?	1. Целью практической работы было выяснить формулу для вычисления площади боковой поверхности прямой призмы. 2. Была сформулирована гипотеза, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы. После этого установлено, что данная гипотеза, являющаяся теоремой, требует доказательства. 3. Была проанализирована формулировка данной теоремы.	
3.Изучение нового материала			
IV этап – поиск способа доказательства теоремы	1. Формулировку теоремы мы отработали. В чем будет заключаться дальнейшая деятельность по доказательству утверждения?	1.Дальнейшая деятельность будет связана с поиском способа доказательства и доказательством теоремы. После этого необходимо научиться применять данную теорему к решению задач.	<ul style="list-style-type: none"> Поиск и выделение необходимой информации (умение определять, какие знания необходимы для решения задачи);

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>2. Сегодня на уроке мы будем работать в рамках названных вами этапов доказательства теоремы. Тогда сформулируйте цель сегодняшнего урока.</p> <p>3. Выполненная практическая работа позволила нам определить способ доказательства изучаемой теоремы. Вспомните, как доказываются теоремы, в которых необходимо установить справедливость какой-либо формулы, и скажите, в чем заключается данный способ доказательства.</p> <p>4. Можем ли мы воспользоваться данным способом для доказательства изучаемой теоремы? В чем конкретно он будет заключаться для рассматриваемой теоремы.</p> <p>5. Чем являются грани прямой призмы и чему равны их стороны?</p> <p>6. На основании того, что мы только что обсудили, составьте план доказательства теоремы, т.е. запишите все шаги, которые необходимо выполнить для доказательства данного утверждения.</p> <p>7. Чтобы доказать теорему, какие уже ранее изученные определения, свойства, теоремы вам необходимы</p>	<p>2. Доказать теорему о площади боковой поверхности прямой призмы и научиться применять её формулировку к решению задач.</p> <p>3. Способ доказательства состоит в вычислении нужной величины известным способом и последующим преобразованием получившегося выражения в необходимую формулу.</p> <p>4. Да, можем воспользоваться этим способом для доказательства теоремы о площади боковой поверхности прямой призмы. Для данной теоремы этот способ будет заключаться в следующем: вычисляем площадь каждой боковой грани прямой n-угольной призмы, после этого составляем сумму из найденных площадей и с помощью преобразований в получившемся выражении получаем нужную формулу.</p> <p>5. Боковые грани призмы – прямоугольники, одна из сторон которых – сторона основания призмы, а другая сторона равна высоте призмы.</p> <p>6. Обучающиеся самостоятельно составляют план доказательства:</p> <p>1) найти площадь каждой боковой грани по формуле площади прямоугольника;</p> <p>2) составить сумму из найденных площадей;</p> <p>3) преобразовать получившееся выражение;</p> <p>4) найти площадь боковой поверхности прямой призмы.</p> <p>7. Определение прямой призмы, боковой поверхности прямой призмы, формула для вычисления площади прямоугольника.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • структурирование знаний (умение представлять информацию в виде схемы); • осознанное построение речевого высказывания; • выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • построение логической цепочки рассуждений; • самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели.

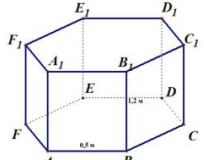
Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
V этап – доказательство теоремы.	Оформите составленный вами план в строгое доказательство. Обращайте внимание на обоснование каждого шага.	<p>Обучающиеся самостоятельно оформляют доказательство: записывают, что дано и что нужно доказать, и прописывают каждый шаг плана с обоснованием.</p> <p>Дано: $A_1A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$ – прямая призма, h – высота, $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности прямой призмы. Доказать: $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$</p> <p>Доказательство:</p> <p>1. Боковые грани прямой призмы – прямоугольники, основания которых – стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Значит, площадь каждой боковой грани равна: $A_1A_2 \cdot h, A_2A_3 \cdot h, \dots, A_{n-1}A_n \cdot h$.</p> <p>2. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей боковых граней, т.е. $S_{\text{бок}} = A_1A_2 \cdot h + A_2A_3 \cdot h + \dots + A_{n-1}A_n \cdot h$.</p> <p>3. Преобразуем данное выражение: $S_{\text{бок}} = h \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n)$. В скобках получили сумму сторон основания, т.е. периметр.</p> <p>Таким образом, $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$, ч.т.д.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Осознанное построение речевого высказывания в письменной форме; установление причинно-следственных связей (умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям); построение логической цепочки рассуждений; доказательство
4.Закрепление нового материала			
VI этап – применение теоремы	<p>Проанализируем выполненное доказательство и закрепим его:</p> <ol style="list-style-type: none"> Сформулируйте теорему. Выделите идею доказательства, основные этапы доказательства. Доказательство теоремы мы изучили, перейдем теперь к решению задач. Давайте вернемся к задаче, с которой мы начали изучение теоремы. 	<ol style="list-style-type: none"> Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы. Основная идея доказательства заключается в том, мы вычисляем площадь каждой боковой грани прямой n-угольной призмы, после этого составляем сумму из найденных площадей и с помощью преобразований в получившемся выражении получаем нужную формулу. 	<ul style="list-style-type: none"> Осознанное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;

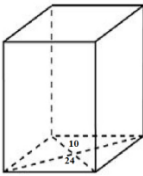
Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>Напомню задачу: «Необходимо изготовить короб с крышкой для хранения картофеля в форме прямой призмы высотой 0,7 м. В основании призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 0,2 м и 0,8 м и боковой стороной 0,5 м.</p> <p>Сколько фанеры понадобится для изготовления короба?» Мы получили ответ 2 м^2. Решите эту задачу с помощью формулы и сравните полученный результат с вычисленным ранее.</p> <p>4. Решим еще несколько задач на применение формулы: «В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы, если: $n = 4$, $a = 12 \text{ дм}$, $h = 8 \text{ дм}$».</p> <p>5. Усложним задание: «Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности».</p> <p>1) Что нам известно? Что неизвестно?</p> <p>2) Для того чтобы найти площадь боковой поверхности прямой призмы, что необходимо знать ещё?</p> <p>3) Как найти третью сторону основания, используя имеющиеся данные? Чему она равна?</p>	<p>3. Обучающиеся решают задачу и сравнивают полученный результат с тем, который был получен ранее.</p> <p>4. Обучающийся выходит к доске и решает задачу:</p> <p>Дано: Решение:</p> <p>$n = 4$ $S_{\text{бок}} = 4ah$</p> <p>$a = 12 \text{ дм}$ $S_{\text{бок}} = 4 \cdot 8 \cdot 12 = 384 (\text{дм}^2)$</p> <p>$h = 8 \text{ дм}$ $S_{\text{пол}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$</p> <p>Найти: $S_{\text{осн}} = a^2 = 12^2 = 144 (\text{дм}^2)$</p> <p>$S_{\text{бок}} - ?$ $S_{\text{пол}} = 2 \cdot 144 + 384 = 672 (\text{дм}^2)$</p> <p>$S_{\text{пол}} - ?$</p> <p>5. Обучающиеся отвечают на вопросы учителя и один из них решает задачу на доске:</p> <p>1) Известно две стороны основания, угол между ними, а также наибольшая из площадей боковых граней.</p> <p>2) Необходимо знать третью сторону основания, чтобы найти периметр, и высоту призмы.</p> <p>3) Нужно воспользоваться теоремой косинусов.</p> <p>$AB^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$ $AB^2 = 49$, $AB = 7$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • знаково-символические действия; • анализ объектов; • установление причинно-следственных связей; • построение логической цепочки рассуждений; • постановка и решение проблемы (умение определять недостаточную для решения задачи информацию).

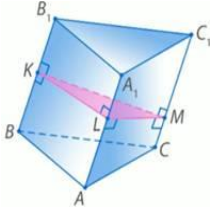
Продолжение таблицы 9

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>4) Для чего в условии задача дано значение наибольшей из площадей боковых граней?</p> <p>5) Какая боковая грань имеет большую площадь и почему?</p> <p>6) Как найти высоту призмы?</p> <p>7) Чему тогда равна площадь боковой поверхности призмы?</p> <p>На следующем уроке мы продолжим решать задачи, на применение данной формулы.</p>	<p>4) Для того, чтобы найти высоту призмы.</p> <p>5) Большую площадь имеет грань, у которой сторона равна 7, потому что высоты призмы равны, значит, значение площадей отличается значением стороны основания.</p> <p>6) Использовать то, что боковая грань прямоугольник, значит его площадь равна произведению смежных сторон. Получаем, что высота равна 5.</p> <p>7) $S_{бок} = (3 + 5 + 7) \cdot 5 = 15 \cdot 5 = 75 \text{ см}^2$.</p>	
5.Подведение итогов урока	<p>Рефлексия</p> <p>Закончите предложение:</p> <p>«Сегодня на уроке я узнал...»; «Сегодня мне удалось...»; «Я понял, что...»; «Теперь я могу...»; «Я научился...».</p>	<p>Отвечают на вопросы, подводят итоги.</p>	

Урок №3 на тему: «Площадь боковой поверхности прямой призмы»

Цель урока	Развитие умения применять формулировку теоремы к решению задач; формирование умения опровергать предложенное доказательство теоремы и устанавливать связи теоремы с ранее изученными.		
Планируемые результаты обучения	Личностные: готовность и способность к самостоятельной, творческой деятельности; готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию.		
	Предметные: умение применять изученные свойства геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.		
	Метапредметные: формирование компонентов познавательных УУД.		
Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
1. Организационный момент	Приветствует обучающихся, настраивает на продуктивную работу	Обучающиеся приветствуют учителя, проверяют готовность к уроку.	
2. Актуализация знаний (подготовка к изучению нового материала)	Фронтальный опрос: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Что нового вы узнали на прошлом уроке? Чему вы учились? ▪ Чему равна площадь боковой поверхности призмы? ▪ Для работы на уроке нам необходимо вспомнить понятие наклонной призмы. Какая призма называется наклонной? 	1. Узнали, как доказывать теорему о площади боковой поверхности прямой призмы, и учились применять её формулировку к решению задач. 2. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы. 3. Наклонной называется призма, у которой боковое ребро не перпендикулярно основанию	
4. Закрепление нового материала			
VI этап – применение теоремы	1. На прошлом уроке мы начали решать задачи на применение формулы для вычисления площади боковой поверхности прямой призмы. Сегодня мы решим еще несколько задач. Кроме того, сегодня мы снова будем учиться опровергать доказательство с помощью приема проверки независимости аргументов и устанавливать связи между теоремами.	1. Обучающиеся самостоятельно решают предложенные задачи (двое обучающихся решают на обратной стороне доски): 1) $S_{бок} = 6 \cdot 0,5 \cdot 1,2 = 3,6 \text{ м}^2$ $S_{осн} = \frac{3 \cdot 0,5^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 0,64 \text{ м}^2$ $S = 3,6 + 0,64 = 4,24 \text{ м}^2$ Ответ: $4,24 \text{ м}^2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Осознанное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>Как уже было сказано ранее формула площади боковой поверхности призмы очень часто используется для решения практических задач. Решите самостоятельно две таких задачи. После этого сравните полученное решение с образцом, представленным на доске. Если в вашем решении будут ошибки исправьте их (учитель контролирует выполнение решения на доске, в случае необходимости корректирует).</p> <p>Задачи:</p> <p>1) Коллекционер заказал аквариум, имеющий форму правильной шестиугольной призмы. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариума, если сторона основания 0,5 м, а высота 1,2 м? Ответ округлите до сотых.</p> <p>8) На заводе выпускают подарочные коробки в виде прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 24 см и 10 см. Площадь полной поверхности призмы равна 760 см². Какой будет высота этой коробки?</p>	<p>2) $S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$; $760 = 2 \cdot 0,5 \cdot 24 \cdot 10 + S_{бок} \Rightarrow S_{бок} = 520 \text{ см}^2$. Т.к., в основании призмы лежит ромб, то его стороны равны 13 см (находится из прямоугольного треугольника, образованного пересечением диагоналей с использованием теоремы Пифагора и факта, что в ромбе диагонали точкой пересечения делятся пополам). $P_{осн} = 13 \cdot 4 = 52$ $S_{бок} = P_{осн} \cdot h, 520 = 52 \cdot h \Rightarrow h = 10 \text{ см}$</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • знаково-символические действия; • анализ объектов; • построение логической цепочки рассуждений; • постановка и решение проблемы (умение определять недостаточную для решения задачи информацию).
<p>VII этап – опровержение предложенного доказательства теоремы</p>	<p>В процессе изучения предыдущей теоремы мы с вами говорили о том, что существует несколько приемов опровержения аргументов доказательства. В прошлый раз мы начали изучать такой прием опровержения как проверка независимости аргументов. Мы говорили, что для того чтобы овладеть этим приемом необходимо уметь выполнять три действия. Первое действие мы с вами уже отработали и сегодня переходим к отработке второго действия.</p>	<p>1. Обучающиеся выполняют построение вместе с учителем, участвуют в обсуждении, отвечают на вопросы.</p> <p>2. Обучающиеся выполняют предложенное задание:</p> <p>1) Самостоятельно доказывают утверждение: Дано: $A_1A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$ – наклонная призма, $C_1 C_2 \dots C_n$ – перпендикулярное сечение, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности наклонной призмы. Доказать: $S_{бок} = P_{сеч} \cdot A_1 B_1$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> •

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>Второе действие в этом приеме заключается в установлении «природы» каждого аргумента, т.е. определении, чем является каждый отдельный аргумент – аксиомой, определением, теоремой и т.д.</p> <p>Для отработки данного действия обучающимся предлагается выполнить следующее задание: «Докажите что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро. Сколько аргументов Вы привели в защиту тезиса? Выпишите все аргументы. Установите, чем является каждый аргумент – аксиомой, определением, теоремой, следствием из теоремы или определения, условием».</p> <p>3. Перед тем, как вы приступите к выполнению задания, давайте разберемся, как выглядит указанное в утверждении сечение и почему оно перпендикулярно ребрам.</p> <p>Рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Построим плоскость перпендикулярного сечения. На ребре BB_1 выберем точку K. Через точку K проведем перпендикуляр KL в плоскости этой грани AA_1B_1B к ребру BB_1. Этот перпендикуляр будет перпендикуляром и к AA_1. Почему? (т.к. прямые AA_1 и BB_1 параллельны).</p> <p>Проведем перпендикуляр KM перпендикулярно ребру BB_1 в плоскости грани BB_1C_1C.</p> 	<p>Доказательство:</p> <p>1) Боковые грани прямой призмы – параллелограммы. Рассмотрим боковую грань $A_1A_2B_2B_1$: $C_1C_2 \perp A_1B_1$ (т.к. $C_1C_2 \dots C_n$ - перпендикулярное сечение) $\Rightarrow C_1C_2$ - высота параллелограмма $A_1A_2B_2B_1 \Rightarrow S_{A_1A_2B_2B_1} = A_1B_1 \cdot C_1C_2$. Аналогично все стороны сечения $C_1C_2 \dots C_n$ являются высотами боковых граней. Следовательно, их площадь равна произведению соответствующей стороны сечения на боковое ребро, т.е.:</p> $A_2B_2 \cdot C_2C_3, A_3B_3 \cdot C_3C_4, \dots, A_nB_n \cdot C_{n-1}C_n.$ <p>2) Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей боковых граней, т.е.</p> $S_{бок} = A_2B_2 \cdot C_2C_3 + A_3B_3 \cdot C_3C_4 + \dots + A_nB_n \cdot C_{n-1}C_n.$ <p>3) Преобразуем данное выражение. Т.к. боковые ребра призмы равны, то получим:</p> $S_{бок} = A_1B_1(C_2C_3 + C_3C_4 + \dots + C_{n-1}C_n).$ <p>В скобках получили сумму сторон сечения, т.е. периметр.</p> <p>4) Таким образом, $S_{бок} = P_{сеч} \cdot A_1B_1$, ч.т.д.</p> <p>2. Выписывают аргументы и определяют их природу:</p> <p>1) Боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами – определение;</p> <p>2) $C_1C_2 \dots C_n$ - перпендикулярное сечение – условие.</p> <p>3) $C_1C_2 \perp A_1B_1$, т.е. перпендикулярное сечение перпендикулярно ребрам – определение.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Построение логической цепочки рассуждений; • доказательство. • осознанное построение речевого высказывания в устной и письменной форме; • анализ объектов; • установление причинно-следственных связей.

Этап (ход) урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые ПУУД
	<p>Получаем, что боковое ребро BB_1 перпендикулярно двум пересекающимся прямым KL и KM плоскости KLM. Какой вывод исходя из этого можно сделать? На чем основан этот вывод? (BB_1 – перпендикуляр к плоскости KLM по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Т.о., построенное сечение KLM перпендикулярно боковому ребру.</p> <p>4. Переходим к доказательству. Подсказка к выполнению задания: доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы о площади боковой поверхности прямой призмы</p>	<p>4) $S_{A_1A_1B_2B_1} = A_1B_1 \cdot C_1C_2$, т.е. площадь грани равна произведение основания грани на высоту – теорема о площади параллелограмма.</p> <p>5) Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей боковых граней – определение.</p> <p>6) Боковые ребра призмы равны – определение</p> <p>7) В скобках получили сумму сторон сечения, т.е. периметр – определение.</p>	
VIII – установление связей теоремы с ранее изученными	<p>1. Мы проделали всю работу по доказательству теоремы о площади боковой поверхности прямой призмы. Осталось выяснить, что объединяет изученную теорему с другими теоремами, в которых необходимо было установить справедливость некоторой формулы?</p> <p>2. По какому критерию была выполнена группировка?</p>	<p>1. Все эти теоремы объединяет идея доказательства, а именно идея вычисления нужной величины известным способом и последующим преобразованием получившегося выражения в необходимую формулу.</p> <p>2. Группировка была выполнена по способу доказательства.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Анализ объектов; синтез (умение объединять элементы по заданному основанию); выбор критериев для сравнения, сериации и классификации объектов (умение распределять элементы по заданному критерию).
5.Подведение итогов урока	<p>Рефлексия</p> <p>Закончите предложение: «Сегодня на уроке я узнал...»; «Сегодня мне удалось...»; «Я понял, что...»; «Теперь я могу...»; «Я научился...»; «У меня получилось...»</p>	Отвечают на вопросы, подводят итоги.	

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

Во второй главе был проведен анализ особенностей познавательной сферы обучающихся 10-11 классов с целью выделения тех характеристик, которые необходимо учитывать в процессе организации их учебной деятельности.

На основе выделенных характеристик, а также с учетом результатов, полученных в ходе теоретического исследования, были разработаны требования к организации процесса обучения доказательству теорем обучающихся 10-11 классов, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий. Разработанные требования таковы:

1. Включение в процесс изучения теоремы следующих этапов: мотивация изучения теоремы; ознакомление с фактом, отраженным в теореме; усвоение содержания теоремы, её структуры; запоминание формулировки теоремы; ознакомление со способом доказательства теоремы; доказательство теоремы; применение теоремы; установление связей теоремы с ранее изученными теоремами.

2. Исключение из процесса изучения теоремы этапа запоминания формулировки.

3. Включение в процесс изучения теоремы этапа, содержание которого предполагает обучение обучающихся самостоятельному опровержению готовых доказательств.

4. Организация самостоятельной деятельности обучающихся в процессе изучения теоремы.

5. Организация учебного исследования в процессе изучения теоремы.

Для иллюстрации теоретических положений и демонстрации выполнения заявленных требований была сконструирована система конспектов уроков по теме «Площадь боковой поверхности прямой призмы».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель данного исследования заключалась в разработке требований к организации процесса обучения доказательству теорем обучающихся 10-11 классов, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий, и иллюстрации теоретических положений на примере системы конспектов уроков. Для достижения поставленной цели в ходе исследования был решен ряд задач.

Для решения первой задачи были проанализированы работы таких авторов как А.Г. Асмолов, Н.М. Горленко, О.В. Запятая, И.Д. Лушников, Е.Ю. Ногтева, Д.А. Махотин, с целью выделения сущности понятия познавательные универсальные учебные действия, их основных видов и пооперационного состава каждого действия. Конкретизация компонентов познавательных универсальных учебных действий была обусловлена тем, что в ФГОС среднего общего образования они сформулированы на достаточно обобщенном языке, а для их целенаправленного формирования необходимо выделить наиболее простые операции, входящие в состав каждого действия.

В ходе решения второй задачи были изучены работы таких авторов, как Г. И. Саранцев В.А. Далингер, Я.И. Груденов и определена сущность понятия обучения доказательству теорем, выделены основные этапы организации данного процесса.

Для решения третьей задачи в процессе изучения методики работы на каждом из выделенных этапов были выявлены особенности формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся, т.е. те умения, входящие в состав каждого познавательного универсального учебного действия, которые формируются на данном этапе в ходе использования конкретных приемов и выполнения определенных упражнений. Проведенная работа позволила установить соответствие между деятельностью обучающихся в процессе доказательства теоремы и компонентами

познавательных универсальных учебных действий. Результаты данного соответствия наглядно демонстрируют, что обучение доказательству теорем в соответствии с указанными этапами дает возможность для формирования всех компонентов познавательных универсальных учебных действий.

В ходе решения четвертой задачи был проведен анализ особенностей познавательной сферы обучающихся 10-11 классов с целью выделения тех характеристик, которые необходимо учитывать в процессе организации их учебной деятельности. На основе выделенных особенностей, а также с учетом результатов, полученных в ходе теоретического исследования, для решения пятой задачи были разработаны требования к организации процесса обучения доказательству теорем обучающихся 10-11 классов, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий.

Для иллюстрации теоретических положений и демонстрации выполнения заявленных требований была сконструирована система конспектов уроков по теме «Площадь боковой поверхности прямой призмы».

На основании результатов, полученных в ходе исследования, можно сделать вывод, что теорема и деятельность по обучению её доказательству является эффективным средством для формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся.

Таким образом, все задачи были решены и цель выпускной квалификационной работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСОВ

1. Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А., Карабанова О.А., Молчанов С.В., Салмина Н.Г. Проектирование универсальных учебных действий в старшей школе // Национальный психологический журнал. - 2011. - №1(5). - С. 104-110.
2. Батюта М.Б. Возрастная психология: учебное пособие. - М.: Логос, 2011. - 306 с.
3. Березовская И.П. Проблема методологического обоснования концепта «клиповое мышление» // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Гуманитарные и общественные науки. - 2015. - №2. - С. 133-138.
4. Блинова Т.Л., Зюзева О.С. Формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся старшей школы в процессе обучения доказательству теорем // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий [Электронный ресурс] : межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т ; науч. ред. Л. В. Сардак. – Екатеринбург: 2019. - С. 172-176.
5. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. 3 изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 208 с.
6. Газейкина А.И., Казакова Ю.О, Диагностика сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся основной школы // Педагогическое образование в России. - 2016. - №7. - С. 161-168.
7. Газейкина А.И., Пронин С.Г. Формирование когнитивных универсальных учебных действий при обучении робототехники учащихся основной школы // Педагогическое образование в России. - 2015. - №7. - С. 42-49.

8. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., и др. - 22 изд. - М.: Просвещение, 2013. - 255 с.
9. Горленко Н.М., Запятая О.В., Лебединцев В.Б., Ушева Т.Ф. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования // Народное образование. - 2012. - №4. - С. 153-160.
10. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1981. - 95 с.
11. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2006. - 256 с.
12. Далингер В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: учебное пособие. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. - 419 с.
13. Далингер В.А. Проблемы обучения учащихся доказательству теорем // Альманах современной науки и образования. - 2009. - №6. - С. 52-54.
14. Доказательство и опровержение: особенности, способы и формы осуществления // Учебные материалы для студентов URL: https://studme.org/1028041025733/logika/dokazatelstvo_oproverzhenie_osobennost_i_sposoby_formy_osuschestvleniya (дата обращения: 20.04.2019).
15. Дони́на И.А., Поломошнова С.А. Универсальные учебные действия старшего школьника: возрастные особенности и направления развития // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. - 2016. - №5. - С. 39-41.
16. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. - М.: Просвещение, 2003. - 223 с.
17. Коноводова Ю. А. Актуальность самостоятельной работы школьников в образовательном процессе // Педагогика: традиции и инновации: материалы II Междунар. науч. конф. - Челябинск: Два комсомольца, 2012. - С. 105-106.

18. Костромитина Е.В. Теория и практика обучения учащихся средней школы опровержению доказательств математических утверждений: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Саранск, 2006. - 20 с.
19. Кулакова А.Б. Поколение Z: теоретический аспект // Вопросы территориального развития: рубрика «Социальное развитие территорий». - 2018. - №2(42). - С. 1-10.
20. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ин-тов / Лященко Е. И., Зобкова К.Б., Кириченко Т.Ф., Под ред. Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 1988. - 223 с.
21. Лакатос И. Доказательство и опровержение: Как доказываются теоремы. - М.: Наука, 1967. - 152 с.
22. Лушников И.Д., Ногтева Е.Ю. Формирование познавательных универсальных учебных действий в технологиях проектной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся: пособие для учителя. - Вологда: Департамент образования Вологод. обл., Вологод. ин-т развития образования, 2013. - 176 с.
23. Махотин Д.А. Методические основы формирования УУД // Педагогическая мастерская. Все для учителя. - 2014. - №4. - С. 4-8.
24. Мотивация изучения теорем // Студенческая библиотека онлайн URL: https://studbooks.net/1769785/pedagogika/motivatsiya_izucheniya_teorem (дата обращения: 13.04.2019).
25. Острикова Е.А. Психолого-педагогические основы формирования исследовательских умений и навыков школьников // Молодой ученый. - 2012. - №10. - С. 358-361.
26. Память и внимание - компоненты психического здоровья URL: <https://zdd.1sep.ru/article.php?ID=200601906> (дата обращения: 12.04.2019).
27. Правила доказательства и опровержения // ВикиЧтение URL: <https://fil.wikireading.ru/51> (дата обращения: 19.04.2019).

28. Психологические особенности поколения Z URL: http://mansauroki.blogspot.com/2016/04/z_12.html (дата обращения: 26.03.2019).
29. Развитие критического мышления в старшем школьном возрасте // URL:https://vuzlit.ru/425674/razvitie_kriticheskogo_myshleniya_starshem_shkolnom_vozraste (дата обращения: 26.03.2019).
30. Садовников Н.В., Шакирзянова О.Г. Методические основы обучения теоремам в школьном курсе математики // Научное периодическое издание «IN SITU». - 2015. - №4. - С. 112-115.
31. Сапа А.В. Поколение Z – поколение эпохи ФГОС // Инновационные проекты и программы в образовании. - 2014. - №2. - С. 24-30.
32. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. - М.: Просвещение, 2002. - 224 с.
33. Саранцев Г.И. Методика работы с теоремой в контексте деятельностного подхода // Математика в школе. - 2016. - №3. - С. 35-42.
34. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе. - М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005. - 183 с.
35. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. - Киев: Рад. школа, 1983. - 192 с.
36. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Как сделать изучение теорем геометрии более эффективным? // Математика в школе. - 2017. - №3. - С. 34-39.
37. Столяр А.А. Педагогика математики: Курс лекций. - 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Высшая школа, 1974. - 382 с.
38. Сусленкова Я.А. Теоретические основы формирования универсальных учебных действий старшеклассников // Вестник университета российской академии образования. - 2012. - №2. - С. 40-42.
39. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования от 17 мая 2012 г. № 413 // Министерство образования и

науки Российской Федерации URL: <http://минобрнауки.рф/документы/2365> (дата обращения: 15.03.2019).

40. Фельдштейн Д.И. Психология взросления. - М.: 2003. - 47-51 с.

41. Формирование умений искать доказательство // Лекция URL: <https://lektsia.com/5x7ef0.html> (дата обращения: 9.03.2019).

42. Хнычкина Е. Е. Познавательные универсальные учебные действия и их оценка - стратегия развития учителя // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. - 2014. - №4. - С. 18-20.

43. Чапкина И.А. Проблема формирования самостоятельной деятельности учащихся при обучении математике в старшей школе // Вопросы современной педагогики и психологии: свежий взгляд и новые решения: сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции Том. III. - Екатеринбург: Инновационный центр развития образования и науки, 2016. - С. 57-59.

44. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «Познавательные универсальные учебные действия» // Научное обозрение. Педагогические науки. - 2015. - №3. - С. 179.

45. Шестакова Л.Г., Мурзабаева У.О. Учебно-исследовательская деятельность как средство формирования познавательных универсальных учебных действий (на материале математики 9–11 классов) // Международный журнал экспериментального образования. - 2018. - №9. - С. 32-36.